Programme de colles : semaine 10, du 8/12 au 12/12

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Études de fonctions

Reprise du programme précédent : consulter le programme de la semaine S9.

2 Logique

Attention : *les raisonnements suivants n'ont pas encore été abordés en classe : principe de double implication, contraposition, raisonnement par l'absurde, analyse synthèse.*

- principe d'exemple et de contre-exemple pour prouver une propriété du type "$\exists x \in E \quad : \quad \mathcal{P}(x)$" ou nier une propriété du type "$\forall x \in E, \ \mathcal{P}(x)$"
- principe pour prouver une propriété du type "$\forall x \in E, \ \mathcal{P}(x)$" ("soit $x \in E$ alors ... donc $\mathcal{P}(x)$")

3 Informatique en langage Python

- listes :
  - *Reprise du programme précédent*
  - copie d'une liste via la syntaxe `M=L[:]`
  - notion d'effet de bord
- utilisation de bibliothèques via `import bibli as alias`. On recommande d'utiliser `numpy` plutôt que `math` pour les fonctions mathématiques usuelles.
- graphes avec `matplotlib.pyplot` : Savoir tracer le graphe d'une suite (u_n), d'une fonction f définie sur $[a, b]$ (liste des abscisses `[a+k*(b-a)/N for k in range(N+1)]` à connaître)

4 Ensembles

Attention : *conformément au programme, ce chapitre doit être traité "sans abstraction excessive", on proposera des exercices permettant de s'assurer que les définitions et méthodes élémentaires sont comprises. Les notions de minorant/majorant, bornes sup/inf n'ont pas encore été abordés en classe.*

- vocabulaire : élément, partie, ensemble vide ; descriptions d'ensembles : en extension, par équation et par paramétrage
- inclusion d'ensembles : savoir montrer que $A \subset B$, via "soit $x \in A$ alors ... donc $x \in B$".
  Savoir montrer que $A \not\subset B$
- égalité d'ensembles : savoir montrer que $A = B$ par principe de double inclusion, ou en montrant que
  $x \in A \iff x \in B$
- union et intersection : associativité, union et intersection finies, exemple d'union et d'intersection infinies
- complémentaire et différence : on note $\overline{A} = E \backslash A$ le complémentaire de A dans E, et par définition $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
- formules de De Morgan :
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- distributivité de $\cap$ et $\cup$:
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- produit cartésien $I \times J$ de deux ensembles I et J, représentation dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $I, J \subset \mathbb{R}$. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E

5 Questions de cours

1. Présenter une fonction usuelle parmi : $x \longmapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, inverse, racine carrée, logarithme, exponentielle, $x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, cosinus, sinus, tangente, valeur absolue.
2. Démontrer par une étude de fonction que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \geq 1 + x$.
3. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition de "f admet un minimum en a". *On pourra remplacer "minimum" par "minimum local", "maximum", "maximum local".*
4. Soient les ensembles $A = \{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ *(attention, ici il y a deux questions en une)*. On considérera l'élément $(-1, 0)$.
5. Énoncer les formules appelées "distributivité" de $\cup$ et $\cap$.
6. Énoncer les formules appelées "règles de De Morgan" pour le complémentaire d'une union et d'une intersection.
7. Rappeler la définition de la moyenne et de l'écart type d'une série $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de nombres réels. Écrire deux fonctions Python prenant en argument une liste de nombres réels et renvoyant respectivement leur moyenne et leur écart-type *(cf TP 8)*.
8. Écrire une fonction `appartient` prenant en argument une liste `L` et une variable `a` et renvoyant `True` si `a` apparaît dans `L` et `False` sinon. On n'utilisera pas l'instruction `a in L`.
9. Écrire un programme Python permettant de tracer le graphe d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ choisie par l'examinateur.
10. Écrire un programme Python permettant de tracer u_n en fonction de n où (u_n) est une suite définie par récurrence choisie par l'examinateur.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 6 (opérations sur les limites), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6660`
  Attention :** **aucune technique pour lever une forme indéterminée n'est au programme cette semaine

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.