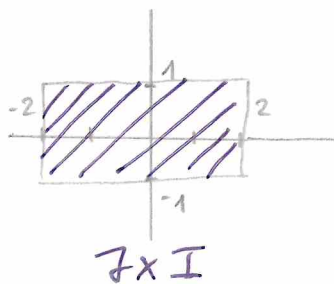
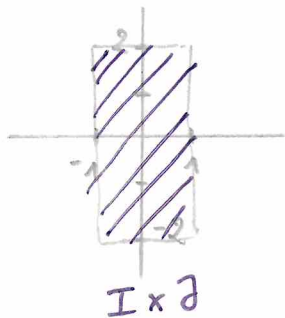


TD 7 : exo 6

1)



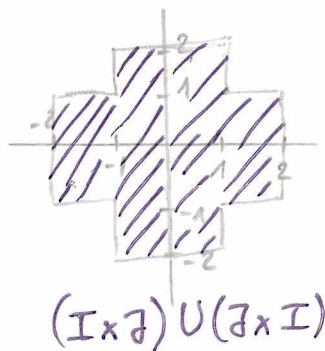
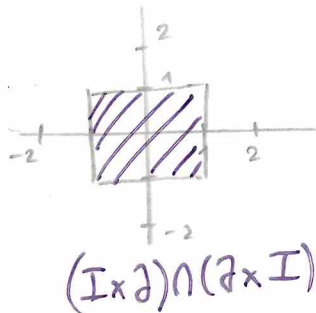
2) Prenons $(x, y) = (0, 2)$.

On a $(x, y) \in I \times J$

mais $(x, y) \notin J \times I$

Ainsi $I \times J \not\subset J \times I$

3)



4) On propose deux méthodes :

méthode 1 : par double inclusion

• $(I \times J) \cap (J \times I) \subset [-1, 1]^2$: Soit $(x, y) \in (I \times J) \cap (J \times I)$ alors $(x, y) \in I \times J$ et $(x, y) \in J \times I$ donc $x \in I, y \in J$ et $x \in J$ et $y \in I$. Ainsi $x \in I \cap J$ et $y \in I \cap J$ donc $(x, y) \in I^2 = [-1, 1]^2$.

• $[-1, 1]^2 \subset (I \times J) \cap (J \times I)$: Soit $(x, y) \in [-1, 1]^2$ alors $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$. Or $[-1, 1] = I \subset J = [-2, 2]$ donc $x \in J$ et $y \in J$. Ainsi $(x \in I \text{ et } y \in J)$ et $(x \in J \text{ et } y \in I)$ donc $(x, y) \in (I \times J) \cap (J \times I)$.

Finalement, on a bien l'égalité demandée.

méthode 2 : par équivalences

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \in (I \times J) \cap (J \times I) &\Leftrightarrow (x, y) \in I \times J \text{ et } (x, y) \in J \times I \\ &\Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y \in J) \text{ et } (x \in J \text{ et } y \in I) \\ &\Leftrightarrow x \in I \cap J \text{ et } y \in I \cap J \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (I \cap J)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } (I \times J) \cap (J \times I) = (I \cap J)^2 = ([-1, 1] \cap [-2, 2])^2 = [-1, 1]^2.$$