Mathématiques - mercredi 10 décembre 2025
Devoir n°4 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet compte 5 exercices indépendants. Il comporte 3 pages dont une annexe.**
- **L'exercice 1 doit être rendu sur une copie séparée.**
- **On rendra l'annexe (avec son nom) même si elle n'est pas complétée.**

Exercice 1 (informatique)**.**
Dans cet exercice, on souhaite manipuler des listes Python pour représenter des ensembles de nombres. On dira par exemple que la liste `L = [1,2,5]` représente l'ensemble $E = \{1, 2, 5\}$.

1. Dans cette question on s'intéresse aux inclusions ou égalités d'ensembles.
   (a) Écrire une fonction `appartient` prenant en arguments une liste `L` représentant l'ensemble E et un nombre a, et renvoyant `True` si $a \in E$ et `False` sinon. *Un parcours de liste est attendu.*
   (b) En utilisant la fonction `appartient`, écrire une fonction `inclus` prenant en arguments deux listes `L1` et `L2` représentant respectivement deux ensembles E_1 et E_2, et renvoyant `True` si $E_1 \subset E_2$ et `False` sinon.
   (c) En utilisant la fonction `inclus`, écrire une fonction `égal` prenant en arguments deux listes `L1` et `L2` représentant respectivement deux ensembles E_1 et E_2, et renvoyant `True` si $E_1 = E_2$ et `False` sinon.
   (d) Si `L1` et `L2` sont deux listes telles que `égal(L1,L2)` renvoie `True`, le booléen `L1 == L2` vaut-il nécessairement `True` ?
2. Dans cette question, on s'intéresse à des ensembles définis à partir d'un autre ensemble.
   (a) Écrire une fonction `carrés` prenant en argument une liste `L` correspondant à un ensemble E et renvoyant une liste correspondant à l'ensemble $F = \{x^2,\ x \in E\}$.
   (b) Écrire une fonction `positifs` prenant en argument une liste `L` correspondant à un ensemble E et renvoyant une liste correspondant à l'ensemble $F = \{x \in E\ :\ x > 0\}$.
   (c) Écrire une fonction `croix` prenant en argument une liste `L` correspondant à un ensemble E et renvoyant une liste correspondant à l'ensemble $E^2 = E \times E$.

Exercice 2 (cours)**.**

1. Énoncer la formule du binôme de Newton.
2. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de : “f est strictement décroissante sur $[0, 1]$”.
3. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en -1. Donner l'équation de la tangente au graphe de g en -1.

Exercice 3 (calculs)**.**

1. Dériver les fonctions suivantes (on ne s'intéressera pas aux ensembles de dérivabilité) :

   (a) $f : x \longmapsto \dfrac{xe^{-x}}{2}$

   (b) $g : x \longmapsto \sqrt{1 + \cos^2(x)}$.

2. Déterminer les limites suivantes ou dire s'il s'agit d'une forme indéterminée.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{1+x}}$ | (b) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{x^2-2}{1-x}$

3. Calculer la somme suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-2k}$.

Exercice 4 (étude de fonction)**.**
Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par l'expression :

$$f(x) = \ln(-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5)$$

1. Faire l'étude complète de f. On tracera l'allure de son graphe sur l'annexe.
   On donne les approximations : $\ln(2) \simeq 0,7$ *;* $\ln(3) \simeq 1,1$ *;* $\ln(4) \simeq 1,4$ *;* $\ln(5) \simeq 1,6$ *;* $\ln(6) \simeq 1,8$ *;* $\ln(7) \simeq 1,9$ *;* $\ln(8) \simeq 2,1$ *;* $\ln(9) \simeq 2,2$ *et* $\ln(10) \simeq 2,3$.
2. (a) Écrire une fonction Python prenant en argument un nombre réel x et renvoyant $f(x)$.
   (b) Écrire un code Python permettant de tracer le graphe de f sur $[-1,5\ ;\ 3]$ avec 100 points de tracé.

Exercice 5 (approximation de $\sqrt{1+x}$)**.**
Si on ne dispose pas de calculatrice, il est fastidieux de déterminer à la main une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre compris, par exemple, entre 1 et 4. Que valent, environ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2,7}$ ou, de manière générale, $\sqrt{1+x}$ pour $x \in [0,3]$?

Dans cet exercice, on propose d'étudier une approximation de $\sqrt{1+x}$ par une quantité de la forme $1+ax$ où a est un paramètre à déterminer. On s'intéresse donc à l'approximation :

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + ax \quad \text{pour} \quad x \in [0,3]$$

et on souhaite, plus précisément, déterminer la meilleure valeur possible du paramètre a.

1. Démontrer par études de fonctions que : $\forall x \in [0,3],\ 1 + \dfrac{x}{3} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

Dans la suite, on s'intéresse donc uniquement aux valeurs $a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, et on note

$$f_a : x \longmapsto \sqrt{1+x} - 1 - ax.$$

La quantité $|f_a(x)|$ représente l'erreur commise par l'approximation $\sqrt{1+x} \simeq 1 + ax$. Ainsi, lorsque a est fixé, la plus grande erreur commise par cette approximation sur l'intervalle $[0,3]$ est la quantité

$$E(a) = \max_{x\in[0,3]} |f_a(x)|.$$

Finalement, on cherche la valeur de a minimisant $E(a)$.

2. Soit $a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.
   (a) Démontrer que f_a admet un maximum et un minimum sur $[0,3]$ dont les valeurs sont respectivement $\dfrac{1}{4a} + a - 1$ et $1 - 3a$.
   (b) Quel est le signe de $1 - 3a$?
   (c) Résoudre l'équation $\dfrac{1}{4a} + a - 1 \geq 3a - 1$.
   (d) En déduire l'expression de $E(a)$.
3. Conclure en déterminant le minimum de $E(a)$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Annexe

NOM et PRÉNOM :