

Corrigé DS 4

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on propose des parcours par indices. Des parcours par éléments étaient aussi acceptés.

1) a) `def appartient(L, a):`
 `n = len(L)`
 for `k` in `range(n)`:
 if `L[k] == a`:
 return `True`
 return `False`

b) `def inclus(L1, L2):`
 `n = len(L1)`
 for `k` in `range(n)`:
 `a = L1[k]`
 if not(`appartient(L2, a)`): # $a \notin E_2$ alors $E_1 \not\subset E_2$
 return `False`
 return `True`

c) `def egal(L1, L2):`
 return `inclus(L1, L2) and inclus(L2, L1)` # principe de double inclusion

d) Si `egal(L1, L2)` vaut `True`, les listes `L1` et `L2` ne sont pas nécessairement les mêmes car dans une liste Python l'ordre des éléments compte et on peut répéter le même élément plusieurs fois alors que pour un ensemble mathématique l'ordre ne compte pas et on ne répète pas le même élément plusieurs fois.

Par exemple les listes `L1 = [1, 3, 5, 3]` et `L2 = [5, 3, 1]` correspondent au même ensemble $E = \{1, 3, 5\}$ mais sont différentes.

2) a) `def carrés(L):`
 `return [x*x 2 for x in L]`

b) `def positif(L):`
 `M = []`
 `n = len(L)`
 `for k in range(n):`
 `a = L[k]`
 `if a > 0:`
 `M.append(a)`
 `return M`

c) `def croix(L):`
 `M = []`
 `n = len(L)`
 `for k in range(n):`
 `a = L[k]`
 `for i in range(n):`
 `b = L[i]`
 `M.append((a,b))`
 `return M`

Exercice 4

2) a) `import numpy as np`
`def f(x):`
 `a = np.exp(-2*x)`
 `b = np.exp(-x)`
 `c = -a + 4*b + 5`
 `return np.log(c)`

b) `import matplotlib.pyplot as plt`
`a = -1.5`
`b = 3`
`N = 99 # (N=100 sera accepté)`
`abxi = [a + k*(b-a)/N for k in range(N+1)]`
`ordx = [f(x) for x in abxi]`
`plt.plot(abxi, ordx)`
`plt.show()`

Exercice 2

1) On a : $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

2) f est strictement décroissante sur $[0,1]$ lorsque :

$$\forall x, y \in [0,1], x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

3) L'équation de la tangente au graphe de g en -1 est

$$y = g(-1) + g'(-1)(x+1)$$

Exercice 3

1) a) $f'(x) = \frac{1}{2}x(-1xe^{-x} + x(-e^{-x})) = \frac{(1-x)e^{-x}}{2}$

b) Notant $u(x) = 1 + \cos^2(x)$, on a :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2\cos(x)\cos'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = -\frac{\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$$

2) a) $1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 1} 0$ donc $\ln(1 + \frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

$1+x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\sqrt{y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sqrt{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\sqrt{1+x}} = 0$

b) $x^2 - 2 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1^2 - 2 = -1$

$1-x \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0^+$ car si $x < 1$ alors $1-x > 0$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{1-x} = -\infty$

$$\begin{aligned}
 3) S_n &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-2k} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-2k} \right) - \binom{n}{0} 2^{n-2 \times 0} \\
 &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 2^{-k} \right) - 2^n = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) - 2^n \\
 &= \left(2 + \frac{1}{2} \right)^n - 2^n = \boxed{\left(\frac{5}{2} \right)^n - 2^n}
 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : -e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 > 0\}$
 On résout donc pour $x \in \mathbb{R}$:

$$-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-x} \\ -y^2 + 4y + 5 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

Le discriminant de $-X^2 + 4X + 5$ est $4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 36$ donc ce polynôme a pour racines $\frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 + 6}{-2} = -1$ et $\frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times (-1)} = \frac{-4 - 6}{-2} = 5$.

De plus son coefficient dominant est $-1 < 0$, donc :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-x} \\ -1 < y < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < e^{-x} < 5 \Leftrightarrow e^{-x} < 5 \quad (**)$$

où cette dernière équivalence vient du fait que $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$. Puis :

$$(**) \Leftrightarrow -x < \ln(5) \Leftrightarrow x > -\ln(5)$$

Finalement $\mathcal{D} =]-\ln(5), +\infty[$.

On calcule ensuite que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) = \frac{2e^{-2x} - 4e^{-x}}{-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5} = \boxed{\frac{2e^{-x}}{-e^{-x} + 4e^{-x} + 5} \times (e^{-x} - 2)}$$

Par ce qui précède, $-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 > 0$ sur $\mathcal{D}$, et $2e^{-x} > 0$ sur $\mathcal{D}$, donc :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq 2 \Leftrightarrow -x \geq \ln(2) \Leftrightarrow x \leq -\ln(2)$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\ln(5)$	$-\ln(2)$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f	$-\infty$	$\ln(9)$	$\ln(5)$

dans lequel on a indiqué les valeurs remarquables suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\ln(5)^+} f(x) = -\infty$

car $-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 \rightarrow 0^+$
 $x \rightarrow -\ln(5)^+$

(par construction de $\mathbb{R}$)

et $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} -\infty$.

- $f(-\ln(2)) = \ln(-e^{-2\ln(2)} + 4e^{-\ln(2)} + 5)$
 $= \ln(-e^{\ln(4)} + 4 \times 2 + 5)$
 $= \ln(-4 + 8 + 5)$
 $= \ln(9)$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(5)$ car $e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ dmc $-e^{-2x} + 4e^{-x} + 5 \rightarrow 5$
 $x \rightarrow +\infty$
 et $\ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 5} \ln(5)$.

On obtient finalement le graphe de f donné en annexe.

Exercice 5 :

1) On traite d'abord les 2 inégalités.

• Soit $h: x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{3}$. La fonction h est dérivable sur $[0, 3]$
 et $\forall x \in [0, 3], h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{3}$. On résout pour $x \in [0, 3]$:

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1+x \leq \frac{9}{4} \text{ (correct car } 1+x \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$$

On obtient donc le tableau de variation de h :

x	0	$\frac{5}{4}$	3
$h'(x)$	$+$	0	$-$
h	0	$\nearrow$	$\searrow 0$

dans lequel on indique que :

$$h(0) = \sqrt{1+0} - 1 - \frac{0}{3} = 0$$

$$\text{et } h(3) = \sqrt{1+3} - 1 - \frac{3}{3} = 2 - 1 - 1 = 0$$

On constate dans le tableau de variation de h que : $\forall x \in [0, 3], h(x) \geq 0$
 c'est-à-dire $\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{3} \geq 0$ ou encore $\boxed{\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{3}}$

• Soit $h: x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$. La fonction h est dérivable sur $[0, 3]$ et
 $\forall x \in [0, 3], h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}$.

Comme $x \geq 0$ on a $1+x \geq 1$ donc $2\sqrt{1+x} \geq 2$ donc $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$
 donc $h'(x) \leq 0$. Ainsi h est décroissante sur $[0, 3]$

x	0	3
$h'(x)$		-
h	0	$\searrow$

De plus, $h(0) = \sqrt{1+0} - 1 - \frac{0}{2} = 0$,
 donc $\forall x \in [0, 3], h(x) \leq 0$ c'est-à-dire
 $\boxed{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \leq 0}$ ou encore $\boxed{\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}}$

2) a) La fonction f_a est dérivable sur $[0, 3]$ et :

$\forall x \in [0, 3], f'_a(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - a$. On veut donc, pour $x \in [0, 3]$,

$$\begin{aligned} f'_a(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq a \Leftrightarrow 2\sqrt{1+x} \leq \frac{1}{a} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2a} \Leftrightarrow 1+x \leq \frac{1}{4a^2} \quad (\text{correct car } 1+x \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \boxed{x \leq \frac{1}{4a^2} - 1} \end{aligned}$$

De plus, comme $a \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ on a :

$$\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{9} \leq a^2 \leq \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad \frac{4}{9} \leq 4a^2 \leq 1$$

$$\text{donc} \quad \frac{9}{4} \geq \frac{1}{4a^2} \geq 1 \quad \text{donc} \quad \frac{5}{4} \geq \frac{1}{4a^2} - 1 \geq 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{4a^2} - 1 \in [0, 3]$$

de sorte que le tableau de variations de f_a sur $[0, 3]$ est le suivant :

x	0	$\frac{1}{4a^2} - 1$	3
$f'_a(x)$		+	-
f_a	0	$\nearrow \frac{1}{4a} + a - 1$	$\searrow 1 - 3a$

On calcule que :

- $f_a(0) = \sqrt{1+0} - 1 - 0 = 0$
- $f_a\left(\frac{1}{4a^2} - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{4a^2} - 1 + 1} - 1 - a\left(\frac{1}{4a^2} - 1\right)$
 $= \frac{1}{\sqrt{4a^2}} - 1 - \frac{1}{4a} + a = \boxed{\frac{1}{4a} + a - 1}$
- $f_a(3) = \sqrt{1+3} - 1 - 3a = \boxed{1 - 3a}$

Comme $a \geq \frac{1}{3}$ on a $3a \geq 1$ dnc $1-3a \leq 0$.

Ainsi on lit dans le tableau de variation que :

- f_a admet un maximum en $\frac{1}{4a^2}-1$ qui vaut $\frac{1}{4a}+a-1$
- et • f_a admet un minimum en 3 qui vaut $1-3a$.

b) Comme vu ci-dessus $1-3a \leq 0$.

c) Pour $a \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ on a :

$$\frac{1}{4a}+a-1 \geq 3a-1 \Leftrightarrow \frac{1}{4a} \geq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{8} \geq a^2 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

où les deux dernières équivalences sont correctes car $a > 0$.

d) Le maximum de $|f_a|$ est atteint lorsque f_a est maximale ou minimale.

$$\text{On a donc } E(a) = \max_{x \in [0,3]} |f_a(x)| = \max \left(\left| \frac{1}{4a}+a-1 \right|, |1-3a| \right)$$

Or $1-3a \leq 0$ dnc $|1-3a| = 3a-1$,
et $\frac{1}{4a}+a-1 \geq 0$ d'après le tableau de variation de f_a (ou
puce que $\frac{1}{4a}+a-1 = \frac{1}{4a}(1+4a^2-4a) = \frac{(2a-1)^2}{4a} \geq 0$ car $a > 0$).

$$\text{Donc } E(a) = \max \left(\frac{1}{4a}+a-1, 3a-1 \right).$$

Or, d'après la question c), on a $\frac{1}{4a}+a-1 \geq 3a-1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$\text{dnc } E(a) = \begin{cases} \frac{1}{4a}+a-1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 3a-1 & \text{si } \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) Étudions la fonction E sur $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$:

• E est dérivable sur $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]$ et $\forall a \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]$,

$$E'(a) = -\frac{1}{4a^2}+1. \text{ Or } 0 \leq a \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ dnc } 0 \leq a^2 \leq \frac{1}{8}$$

$$\text{dnc } \frac{1}{4a^2} \geq 2 \text{ dnc } -\frac{1}{4a^2} \leq -2 \text{ dnc } E'(a) \leq -1$$

Ainsi E est décroissante sur $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]$.

• E est aussi dérivable sur $[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$ avec $\forall a \in [\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$,
 $E'(a) = 3 > 0$. Donc E est croissante sur $[\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$.

On obtient finalement le tableau de variations suivant :

a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
E			



dans lequel on lit que E est minimale
en $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Finalement, l'approximation $\sqrt{1+x} \approx 1+ax$ minimisant le maximum
de l'erreur commise sur $[0, 3]$ est celle obtenue pour $\boxed{a = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$

Annexe

NOM et PRÉNOM :

