Programme de colles : semaine 11, du 15/12 au 19/12

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

Pas d'informatique cette semaine.

1 Logique

- principe d'exemple et de contre-exemple pour prouver une propriété du type "$\exists x \in E : \mathcal{P}(x)$" ou nier une propriété du type "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$"
- principe pour prouver une propriété du type "$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$" ("soit $x \in E$ alors ... donc $\mathcal{P}(x)$")
- principe de double implication pour prouver une équivalence
- principe de contraposition pour prouver une implication
- raisonnement par l'absurde
- raisonnement par analyse-synthèse

2 Ensembles

Attention : *conformément au programme, ce chapitre doit être traité "sans abstraction excessive", on proposera des exercices permettant de s'assurer que les définitions et méthodes élémentaires sont comprises.*

- vocabulaire : élément, partie, ensemble vide ; descriptions d'ensembles : en extension, par équation et par paramétrage
- inclusion d'ensembles : savoir montrer que $A \subset B$, via "soit $x \in A$ alors ... donc $x \in B$". Savoir montrer que $A \not\subset B$
- égalité d'ensembles : savoir montrer que $A = B$ par principe de double inclusion, ou en montrant que $x \in A \iff x \in B$
- union et intersection : associativité, union et intersection finies, exemple d'union et d'intersection infinies
- complémentaire et différence : on note $\overline{A} = E \backslash A$ le complémentaire de A dans E, et par définition $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
- formules de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- distributivité de $\cap$ et $\cup$: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ et $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- produit cartésien $I \times J$ de deux ensembles I et J, représentation dans $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $I, J \subset \mathbb{R}$. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E
- majorants/minorants, maximum/minimum, bornes supérieure/inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). *Nous n'avons pas fait d'exercice sur ce point.*

3 Suites réelles

Attention : *début de chapitre uniquement. Nous n'avons pas encore vu les limites infinies, ni l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour les calculs de limites, ni les croissances comparées ni les équivalents n'ont encore été abordés en classe. Les définitions des limites avec des quantificateurs doivent être connues, mais leur utilisation ne doit pas constituer le cœur des exercices demandés.*

- monotonie (méthodes $u_{n+1} - u_n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$)
- suites majorées, minorées, bornées
- suites convergentes :
  - définition avec des quantificateurs
  - unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les limites
  - (u_n) converge vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ (*la notion générale de suite extraite n'a pas été étudiée en classe*)
  - passage à la limite des inégalités larges
  - théorème d'encadrement (ou des "gendarmes")
  - Si $|u_n| \leq \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ alors $u_n \longrightarrow 0$
  - théorème de la limite monotone
  - suites adjacentes

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soient les ensembles $A = \{\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right),\ t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=1\}$. Montrer que $A \subsetneq B$ *(attention, ici il y a deux questions en une)*. On considérera l'élément $(-1,0)$.
2. Énoncer les formules appelées "distributivité" de $\cup$ et $\cap$.
3. Énoncer les formules appelées "règles de De Morgan" pour le complémentaire d'une union et d'une intersection.
4. Soit $K = \{(0,1),(1,0)\}$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telle que $K = A \times B$. (*cf* FC 0.3, exo 20)
5. Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.
6. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner la définition de : "(u_n) est majorée/minorée/bornée".
7. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, et savoir l'expliquer sur un dessin.
8. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone, théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes.
9. Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) converge. Indication : $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la suite (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 6 (opérations sur les limites), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6660`
- Remédiation 7 (formes indéterminées), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6708`
  ***Attention :** pour les formes indéterminées, seule la factorisation par le terme dominant a été abordée en classe : en particulier, les croissances comparées ne sont pas au programme cette semaine.*

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.