

2.4. Opérations sur les limites

Prop: Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^N$ et soient $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$
alors 1) $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$

2) $u_n \times v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \times l'$

dém: 1) On sait que

(*) : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n - l| \leq \varepsilon$

(**) : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |v_n - l'| \leq \varepsilon$

On veut prouver que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, |u_n + v_n - l - l'| \leq \varepsilon.$

Soit donc $\varepsilon > 0$; d'après (*) avec $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$\forall n \geq N_1, |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; et d'après (**) avec $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
 $\forall n \geq N_2, |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour pouvoir utiliser simultanément ces 2 inégalités
prenons $N = \max(N_1, N_2)$; alors $\forall n \geq N$ on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$\forall n \geq N, |u_n + v_n - l - l'| = |u_n - l + v_n - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$

2) admis. □

Prop: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^N$ et soit $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. Soit aussi $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$
(où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) une fonction continue en l . Alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(l)$.

dém: cf cours sur la continuité.

Rge: La proposition précédente permet par exemple de dire :

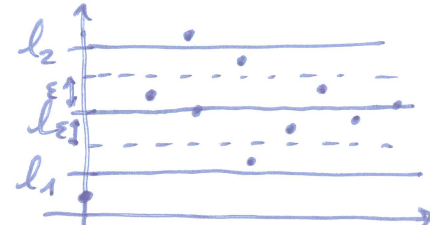
• $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$ donc $\ln(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(2)$ car $\ln$ est continue en 2

• $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3$ donc $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{3}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en 3

Dans ces deux exemples, notons toutefois qu'il faut tout de même s'assurer de pouvoir parler de $\ln(u_n)$ ou de $\frac{1}{v_n}$ c'est-à-dire que $u_n > 0$ et que $v_n \neq 0$. Ceci est assuré par la proposition suivante:

Prop: Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $l \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$. Si $l_1 < l < l_2$ alors à partir d'un certain rang $l_1 < u_n < l_2$.

dém: à comprendre sur un dessin



ex: Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$ alors à partir d'un certain rang $u_n \in [-1, 3]$.
En particulier, une suite convergente est du signe de sa limite à partir d'un certain rang.

Prop: Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soient $l, l' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$.
Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.

dém: Par contraposée montrons que si $l > l'$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > v_n$.
Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$, la 1^{ère} proposition de ce paragraphe assure que $u_n - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l - l'$. Ainsi si $l > l'$ on a $l - l' > 0$ et d'après la proposition précédente, $u_n - v_n > 0$ à partir d'un certain rang d'où en particulier il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > v_n$. $\square$

Rq: $\triangle$ Il n'y a pas de propriété similaire pour les inégalités strictes

c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \not\Rightarrow l < l'$

En effet, on peut donner le contre-exemple suivant : $u_n = 0, v_n = \frac{1}{n}$
on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} > 0$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \geq 0$ et non > 0 .

Moralité: seules les inégalités larges passent à la limite.