

FC 8

exo 3

1) $u_n = \sqrt{n} \left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ car $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par Cr. Comp.

2) $n^2 + n + 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} n^2$ donc $\sqrt{n^2 + n + 1} \sim_{n \rightarrow +\infty} n$ et $2n + 3 \sim_{n \rightarrow +\infty} 2n$

Donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$

3) $u_n = \frac{3^{n+1}}{2^n} \times \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}} - 1}{1 - \frac{\ln(n)}{2^n}} = 3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{1 - \frac{\ln(n)}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

car $\left(\frac{3}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (car $\frac{3}{2} > 1$), $\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $-1 < \frac{2}{3} < 1$) et $\frac{\ln(n)}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (Cr. Comp.)

4) $u_n = \frac{\ln(n^3(1 + \frac{1}{n^3}))}{n^2} = \frac{\ln(n^3) + \ln(1 + \frac{1}{n^3})}{n^2} = 3 \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n^3})}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (Cr. Comp.) et $\frac{\ln(1 + \frac{1}{n^3})}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $\ln(1) = 0$) donc $\frac{\ln(1 + \frac{1}{n^3})}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

5) $u_n = (n^2)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n^2)\right) = \exp\left(2 \frac{\ln(n)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ car $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (Cr. Comp.)

6) $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$

7) $u_n = \exp\left(\frac{1}{n^2} \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$ car $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (Cr. Comp.)

exo 4

1) $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$. Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on a $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} -1$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$.

2) $u_n = \exp\left(n \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car : $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(0) = 0$ donc $\ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ donc $n \ln\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ et que $e^y \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 0$.

3) $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$ donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4) $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(0) = 0$ donc $\tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Or $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$. Donc $\tan\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$

donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.