

Corrigé proposé par le concours Agro-Vét

Corrigé - MMI BCPST 2024

Q1. On reconnaît une suite géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n$. Il y a extinction si $\lim v_n = 0$ c'est à dire si $q \in]0, 1[$.

Q2.1 On pose $f(x) = x + \frac{x(S-x)}{2S}$ sur $\mathbb{R}_+$. f est dérivable car polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{3}{2} - \frac{x}{S}$. Le tableau de variations est le suivant :

x	0	$\frac{3S}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	−
$f(x)$	0	$\frac{9S}{8}$	$-\infty$

Q2.2. On propose le code suivant :

```
for k in range(19):
    v = L[k] + 0.5*L[k]*(S-L[k])/S
    L.append(v)
```

Q2.3. On propose le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Q2.4. On conjecture que $\lim v_n = S$.

Q2.5. On montre par récurrence la propriété :

$$P(n) : "0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S"$$

La propriété est vraie au rang 0 par hypothèse sur v_0 et car $v_1 = v_0 + \frac{v_0}{2} \frac{v_0 - S}{2} \geq v_0$ car $v_0 \in]0, S[$. De plus d'après les variations de f , v_1 est plus petit que $f(S) = S$.

Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq S$ alors, par croissance de f on obtient

$$f(0) \leq f(v_n) \leq f(v_{n+1}) \leq f(S)$$

soit

$$0 \leq v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq S$$

d'où la propriété au rang suivant.

Ainsi (v_n) est croissante et majorée par S donc elle converge vers une limite que l'on note ℓ .

En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient

$$\ell = \ell + \frac{\ell}{2} \frac{S - \ell}{S}$$

soit

$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = S.$$

Comme (v_n) est croissante et $v_0 > 0$, nécessairement $\ell = S$.

Q3.1. On obtient

$$f(x) = \frac{x(S-x)(x-A)}{2}$$

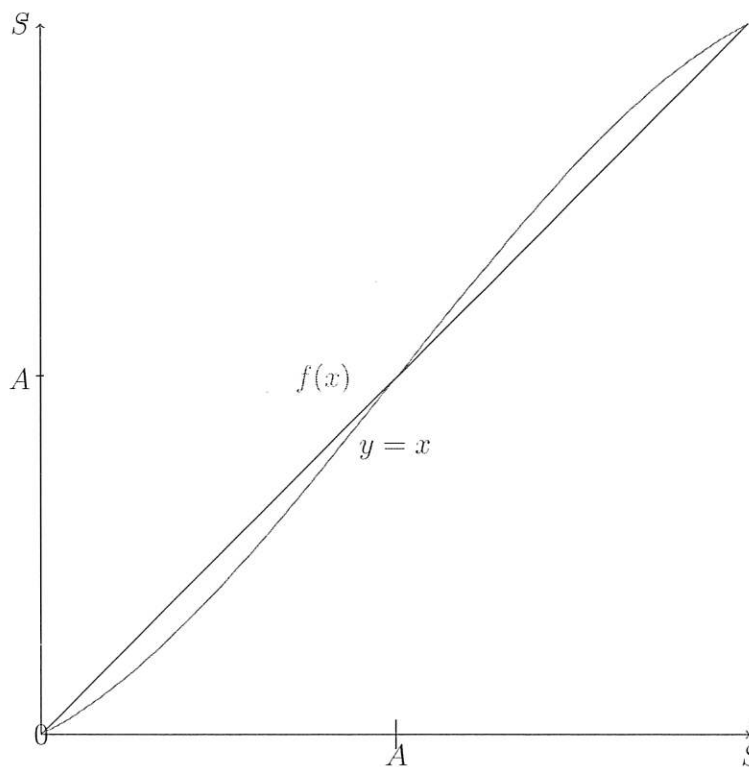
et donc

$$f(x) - x = \frac{x(S-x)(x-A)}{2}.$$

Le signe de $f(x) - x$ est donc :

- strictement positif si $x \in]A, S[$,
- strictement négatif si $x \in]0, A[$,
- nul si $x \in \{0, A, S\}$.

L'allure de courbe de la fonction est donnée par :



Q3.2. Par la question précédente on sait que $f(]0, A[) \subset]0, A[$, donc par récurrence on montre que pour tout $n, v_n \in]0, A[$.

On sait aussi que pour tout $x \in]0, A[$, $f(x) < x$ donc $v_{n+1} < v_n$ donc (v_n) est décroissante.

Elle est décroissante et minorée donc elle converge. En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient

$$\ell = f(\ell)$$

donc $\ell \in \{0, A, S\}$. Comme $v_0 < A$ et que (v_n) est décroissante on a $\ell < A$ donc $\ell = 0$.

Q3.3. Si $v_0 \in]A, S[$, alors on montre que :

- (v_n) est croissante
- pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in]A, S[$.

Par le théorème des suites monotones on conclut que (v_n) converge. En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient que $\lim v_n$ vaut $0, A$ ou S . Or $v_0 > A$ et (v_n) est croissante donc la limite est forcément S .

Si $v_0 = A$ alors on voit par récurrence que la population reste constante égale à A .

Q3.4. S est la quantité maximale de population. C'est la population atteinte s'il y a survie. A est la population initiale minimale pour avoir survie : en dessous il y a extinction.

DM 2 : Corrigé

exo 2 :

On pose $(u_n) = (S_{2n})$ et $(v_n) = (S_{2n+1})$, et montrons que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

• (u_n) est décroissante : En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k x_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k \\ &= (-1)^{2n+2} x_{2n+2} + (-1)^{2n+1} x_{2n+1} \\ &= x_{2n+2} - x_{2n+1} \leq 0 \text{ car } (x_n) \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

• (v_n) est croissante : En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k x_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x_k \\ &= (-1)^{2n+3} x_{2n+3} + (-1)^{2n+2} x_{2n+2} \\ &= x_{2n+2} - x_{2n+3} \geq 0 \text{ car } (x_n) \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - v_n = 0$: En effet, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - v_n = S_{2n} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x_k = -(-1)^{2n+1} x_{2n+1} = x_{2n+1}$$

et $x_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes, elles convergent et ont la même limite : il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = S_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n = S_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Cela implique que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ donc (S_n) converge.