

Programme de colles : semaine 12, du 5/1 au 9/1

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

Pas d'informatique cette semaine.

1 Logique

- principe d'exemple et de contre-exemple pour prouver une propriété du type " $\exists x \in E : \mathcal{P}(x)$ " ou nier une propriété du type " $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ "
- principe pour prouver une propriété du type " $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ " ("soit $x \in E$ alors ... donc $\mathcal{P}(x)$ ")
- principe de double implication pour prouver une équivalence
- principe de contraposition pour prouver une implication
- raisonnement par l'absurde
- raisonnement par analyse-synthèse

2 Suites réelles

Les définitions des limites avec des quantificateurs doivent être connues, mais leur utilisation ne doit pas constituer le cœur des exercices demandés.

- monotonie (méthodes $u_{n+1} - u_n, \frac{u_{n+1}}{u_n}$)
- suites majorées, minorées, bornées
- suites convergentes :
 - définition avec des quantificateurs
 - unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les limites
 - (u_n) converge vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ (la notion générale de suite extraite n'a pas été étudiée en classe)
 - passage à la limite des inégalités larges
 - théorème d'encadrement (ou des "gendarmes")
 - Si $|u_n| \leq \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \rightarrow 0$ alors $u_n \rightarrow 0$
 - théorème de la limite monotone
 - suites adjacentes

• limites infinies :

- définition avec des quantificateurs
- théorème de comparaison : si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang alors : si $v_n \rightarrow +\infty$ alors $u_n \rightarrow +\infty$; et si $u_n \rightarrow -\infty$ alors $v_n \rightarrow -\infty$
- toute suite croissante (resp. décroissante) non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

• calculs pratiques de limites :

- composition de limites, opérations algébriques, formes indéterminées
- méthodes pour lever l'indétermination : factorisation par le terme dominant, quantité conjuguée, retour à l'exponentielle pour les puissances
- croissances comparées. Si $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$: $a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^\beta$ où $v_n \gg u_n$ signifie $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$. (Les relations $n^n \gg n! \gg a^n$ n'ont pas été données en cours.)
- suites équivalentes, opérations sur les équivalents, équivalents usuels
- Si $u_n \gg v_n$ alors $u_n + v_n \sim u_n$, application aux limites de quotient de polynômes en $+\infty$

• étude des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$: *Les résultats ci-dessous doivent être redémontrés pour l'exemple étudié.*

- notion d'intervalle stable : si $f(J) \subset J$ et $u_0 \in J$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in J$
- si f est croissante alors (u_n) est monotone de sens donné par le signe de $u_1 - u_0$. **Seul le cas f croissante a été traité en cours**
- si $u_n \rightarrow \ell$ et si f continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$
- représentation à partir du graphe de f et de la première bissectrice

3 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soit $K = \{(0, 1), (1, 0)\}$. Démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de parties A et B de $\mathbb{R}$ telle que $K = A \times B$. (cf FC 0.3, exo 20)
2. Montrer par analyse-synthèse que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il existe une unique fonction paire $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + f_2$.
3. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner la définition de : “ (u_n) est majorée/minorée/bornée”.
4. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou de : (u_n) tend vers $+\infty$, ou de : (u_n) tend vers $-\infty$ et savoir l'expliquer sur un dessin.
5. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (cas limite finie et limite infinie), théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes, théorème de comparaison.
6. Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) converge. Indication : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la suite (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.
8. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{u_n}$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$. On montrera que (u_n) est croissante et ne peut pas converger.
9. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites non nulles à partir d'un certain rang, donner la définition de $u_n \sim v_n$. Énoncer ensuite un ou plusieurs des équivalents usuels (valables si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) parmi :

• si $\alpha \neq 0$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$	• $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ • $\sin(u_n) \sim u_n$	• $\tan(u_n) \sim u_n$ • $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
---	---	---

10. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul “type remédiation” au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiation 6 (opérations sur les limites), tous les exos :
<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6660>
- Remédiation 7 (formes indéterminées), tous les exos :
<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6708>

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.