Feuille de cours 9.2 : rang d'un système linéaire

Si on s'autorise à modifier l'ordre "naturel" des pivots de la méthode de Gauss, on peut obtenir différentes présentations de l'ensemble des solutions.

Exemple : Résoudre

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ 2x & & & + & z & + & t & = & 1 \\ 4x & & & + & 2z & + & t & = & 5 \end{array}\right.$$

Même s'il n'y a pas unicité de la réduite de Gauss d'un système linéaire, il y a unicité du nombre de variables principales (ou inversement de variables auxiliaires) qui y apparaissent :

Proposition 1 (admis)
Toutes les réduites de Gauss d'un système linéaire ont le même nombre d'inconnues principales (ou, en d'autres termes, de pivots). Ce nombre est appelé **rang du système**.

Exemple : Déterminer le rang des systèmes suivants :

1. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & + & t = 4 \\ & & y & + & z & + & t = 3 \\ & & & & z & + & t = 2 \\ & & & & & & t = 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & & & + & t = 4 \\ & & & & z & + & t = 3 \\ & & & & & & t = 2 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & - & y & + & z & + & t & = 1 \\ 2x & - & 2y & + & z & + & t & = 3 \\ x & - & y & & & & & = 2 \end{array}\right.$$

4. Un système linéaire a pour ensemble de solutions
$$\mathcal{S} = \Big\{\Big(3 - y + t\ ,\ y\ ,\ -1\ ,\ t\ ,\ 4 + 2t - y\Big),\ y, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$
Quel est son rang ?

Remarques :

- Les solutions d'un système à p inconnues et de rang r sont décrites par $p-r$ paramètres (ou variables auxiliaires).
- Un système linéaire carré à p inconnues est de Cramer si et seulement si il est de rang p.
- Le rang r d'un système linéaire à p inconnues et n équations satisfait :
  - $r \leq p$ (moins de variables principales que d'inconnues) ;
  - $r \leq n$ (moins de variables principales que d'équations).
- Le rang d'un système linéaire ne dépend pas de son second membre.

Exercice : Déterminer le rang des systèmes linéaires suivants en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. $\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & a^2y & = & 1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & + & z & = & 0 \\ ax & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & & & - & z & = & ax \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & ay \\ -x & & & + & 3z & = & az \end{array}\right.$