

NOM :

PRENOM :

Note sur 20 :

Déterminer les limites suivantes. Chaque réponse doit être justifiée succinctement.

1. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - \sin(x)$

2. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x}$

3. (/1 pt) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + n - 1}$

4. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$

5. (/1 pt) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3 - x}$

6. (/1,5 pt) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n}$

7. (/1,5 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{3^n - 5^n}$

8. (/1,5 pt) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2n}{\ln(n) + n^2}$

1) $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
 donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - \sin(x) = -\infty$

2) $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$
 donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

3) $\frac{2n^2 - 3n}{n^3 + n - 1} \sim \frac{2n^2}{n^3} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + n - 1} = 0$

4) $\frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{x(x - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$
 avec $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{-1} = 1$
 donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} = +\infty$

5) $x \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} 3$ et $3 - x \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} 0^+$ car si $x < 3$ alors $3 - x > 0$
 donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3 - x} = +\infty$

6) $n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n)\right)$
 & $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées)
 et $e^y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$

7) $\frac{2^n - 1}{3^n - 5^n} = \frac{2^n(1 - \frac{1}{2^n})}{5^n(\frac{3^n}{5^n} - 1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{(\frac{3}{5})^n - 1}$

& $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

car $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5} \in]-1, 1[$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 1}{3^n - 5^n} = 0 \times \frac{1 - 0}{0 - 1} = 0$

8) $\frac{3^n + 2n}{\ln(n) + n^2} = \frac{3^n}{n^2} \times \frac{1 + 2 \frac{n}{3^n}}{\frac{\ln(n)}{n^2} + 1}$

& par croissances comparées

$\frac{3^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 2n}{\ln(n) + n^2} = +\infty$.

9. (/1,5 pt) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1}$

10. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

11. (/1,5 pt) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$9) \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1} = \frac{\sqrt{3n+2}^2 - \sqrt{3n+1}^2}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

10) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)$

Comme $\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on a

$\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$ donc $n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \sim 2$

donc $n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Or $e^y \xrightarrow{y \rightarrow 2} e^2$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$

11) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

donc $4^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{4^n}{n}$.

Or par croissance comparées $\frac{4^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

12) Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ on a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$

donc $n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{n^2}{n} = n$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

12. (/1,5 pt) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

13. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$

14. (/2 pts) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(e^{1/n} - 1)$

13) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$

car $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1) \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{2}$

ou

$$n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1) = n \times \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}^2 - 1^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

$$= n \times \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

et comme $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ on a

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{2}$

14) $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 - 1 = 0$

donc $\sin(e^{\frac{1}{n}} - 1) \sim e^{\frac{1}{n}} - 1$

Puis $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$

Ainsi $\sin(e^{\frac{1}{n}} - 1) \sim \frac{1}{n}$

donc $n \sin(e^{\frac{1}{n}} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.