

Programme de colles : semaine 13, du 12/1 au 16/1

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Suites réelles

Reprise du programme précédent. On insistera sur le calcul pratique de limites.

2 Systèmes linéaires

Aucune interprétation géométrique n'a été abordée en classe.

- définition d'un système linéaire, système homogène, échelonné, triangulaire, de Cramer, compatible
- résolution d'un système échelonné, notion de variables principales et auxiliaires
- algorithme du pivot de Gauss
- notion d'équation de compatibilité
- structure de l'ensemble des solutions : l'ensemble des solutions d'un système homogène est stable par addition et par multiplication par un scalaire ; les solutions d'un système quelconque s'écrivent comme solution particulière + solutions du système homogène
- exemples de systèmes linéaires dépendant d'un paramètre dans le second membre et/ou dans les coefficients
- notion de rang d'un système linéaire, un système carré de taille p est de Cramer si et seulement s'il est de rang p
- exemples de calcul du rang d'un système linéaire en fonction d'un paramètre dans les coefficients

3 Informatique en langage Python

Chaînes de caractères :

- accès aux éléments, concaténation, fonction `len`, caractère non mutable
- parcours par indices et par éléments
- création d'une chaîne depuis la chaîne vide `c = ""` par ajouts successifs `c = c + ...`
- fonction `print`
- lecture et écriture dans un fichier. *Si un exercice concernant la lecture ou l'écriture dans un fichier est donné, toutes les commandes utiles seront rappelées.*

4 Questions de cours

Cette semaine, toutes les colles doivent comporter la résolution d'un système linéaire à n équations et p inconnues ($n, p \in \{2, 3, 4\}$) sans paramètres.

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner la définition de : “ (u_n) est majorée/minorée/bornée”.
2. Donner la définition avec des quantificateurs de : (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ou de : (u_n) tend vers $+\infty$, ou de : (u_n) tend vers $-\infty$ et savoir l'expliquer sur un dessin.
3. Énoncer un des théorèmes suivants : théorème de la limite monotone (cas limite finie et limite infinie), théorème d'encadrement, théorème des suites adjacentes, théorème de comparaison.
4. Pour $n \geq 2$ on pose $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$. Montrer que (u_n) converge. Indication : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que la suite (a_n) converge en montrant que les suites $(u_n) = (a_{2n})$ et $(v_n) = (a_{2n+1})$ sont adjacentes.
6. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{u_n}$. Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$. On montrera que (u_n) est croissante et ne peut pas converger.
7. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites non nulles à partir d'un certain rang, donner la définition de $u_n \sim v_n$. Énoncer ensuite un ou plusieurs des équivalents usuels (valables si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$) parmi :

<ul style="list-style-type: none"> • si $\alpha \neq 0$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ • $\sin(u_n) \sim u_n$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $\tan(u_n) \sim u_n$ • $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
---	---	---

8. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
9. Écrire une fonction `nombre_a` prenant en argument une chaîne de caractères `c` et renvoyant le nombre de fois que `c` contient la lettre `a`. Par exemple `nombre_a("banane")` doit renvoyer 2. On utilisera un parcours par éléments. (cf TP 13)
10. Écrire une fonction `place_a` prenant en argument une chaîne de caractères `c` et renvoyant la liste des indices auxquels `c` contient la lettre `a`. Par exemple `place_a("banane")` doit renvoyer `[1, 3]`. (cf TP 13)

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.