Calcul de primitives

Calculer une primitive d'une fonction, c'est faire l'opération inverse de la dérivation.

Définition 1
Soit I un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple : une primitive de $f : x \longmapsto x^2$ la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$
car

Remarque : Attention, une primitive est une fonction. Ainsi il est incorrect de dire “une primitive de x^2 est $\dfrac{x^3}{3}$”, il faut dire : “une primitive de $x \longmapsto x^2$ est $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3}$”.

Proposition 2
Si I est un intervalle et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante. Autrement dit, si F_0 est une primitive de f alors les primitives de f sont les $F : x \longmapsto F_0(x) + c$ pour $c \in \mathbb{R}$.

Exemple : les primitives de $f : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ sont les $F : x \longmapsto$

Remarques :

- en conséquence, on parle bien d'UNE primitive (et pas de “la” primitive) de f si on ne donne pas la constante $+c$.
- la constante c varie dans $\mathbb{R}$ tout entier (pas dans I).
- attention, pour utiliser ce résultat il faut bien se placer sur un *intervalle*. En effet, si F_1 et F_2 sont deux primitives de $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec D qui n'est pas un intervalle, alors il est possible que $F_1 - F_2$ ne soit pas constante. Par exemple, si $\begin{array}{rccc} f : & [1,2] \cup [3,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ alors les fonctions

$$\begin{array}{rccc} F_1 : & [1,2] \cup [3,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} F_2 : & [1,2] \cup [3,4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ \frac{x^3}{3} + 2 & \text{si } x \in [3,4] \end{cases} \end{array}$$

  sont bien deux primitives de f mais il n'existe pas de constante c pour laquelle $F_2 = F_1 + c$.

Proposition 3
Soit I un intervalle et soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur I.

Exemple : $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \Big[\frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

Remarque : Comme on travaille sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante, donc le choix de la primitive F mise dans le crochet n'impacte pas le résultat final au sens où : $[F(t) + c]_a^b = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Dans le tableau suivant, on donne des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et leurs primitives $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur un intervalle I en notant $c \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration.

$f(x)$	I	$F(x)$
a $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$ax + c$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
x^n $(n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\ln(x) + c$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$	$\ln(-x) + c$
x^α $(\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_*^+$	
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\exp(x) + c$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x) + c$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

Proposition 4 (linéarité de l'intégration)
Soient I un intervalle, soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F + \lambda G$ est une primitive de $f + \lambda g$ sur I.

Démonstration :

Exemples :

- une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{x}$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto 3\cos(x)$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{2}$ est $F : x \longmapsto$

Proposition 5 (primitive de $f(ax+b)$)
Soit f une fonction continue et soit $g : x \longmapsto f(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ des constantes.
Si F est une primitive de f alors la fonction $G : x \longmapsto \dfrac{F(ax+b)}{a}$ est une primitive de g.

Démonstration :

Exemples :

- une primitive de $f : x \longmapsto e^{2x}$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto \cos(2x+1)$ est $F : x \longmapsto$
- une primitive de $f : x \longmapsto (3x-1)^4$ est $F : x \longmapsto$

Exercice 1
Dans chacun des cas, déterminer les primitives F_i de la fonction f_i dont l'expression est donnée. On ne demande pas de préciser l'intervalle sur lequel on travaille.

1. $f_1(x) = 2x+1$
2. $f_2(x) = x^4$
3. $f_3(x) = 2e^x - 4x^3$
4. $f_4(x) = 2\cos(x) - \sin(x)$
5. $f_5(x) = 2\sqrt{x} + 1$
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{x^2}$
7. $f_7(x) = \dfrac{4}{x^3}$
8. $f_8(x) = e^{2x+1}$
9. $f_9(x) = \sin(2\pi x)$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{1}{x+2}$
11. $f_{11}(x) = \dfrac{1}{2x+5}$
12. $f_{12}(x) = e^{-x/2}$
13. $f_{13}(x) = \ln(x+1)$
14. $f_{14}(x) = \ln(2x+1)$
15. $f_{15}(x) = \cos(\frac{x}{\pi})$
16. $f_{16}(x) = 3(1+2x)^2$ (sans développer le carré)
17. $f_{17}(x) = (1-3x)^3$
18. $f_{18}(x) = \dfrac{1}{2-x}$
19. $f_{19}(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
20. $f_{20}(x) = \dfrac{1}{4x^2+1}$
21. $f_{21}(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$
22. $f_{22}(x) = \dfrac{1}{x^2+a}$ pour $a \in \mathbb{R}_*^+$
23. $f_{23}(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4ac < 0$