Exercice 1

1. Soit $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \exp(\sqrt{x}) \end{array}$. Montrer que f est injective mais n'est pas surjective.

2. Soit $\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\infty,2] \\ & & x & \longmapsto & 2-x^2 \end{array}$. Montrer que g est surjective mais n'est pas injective.

Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Donner le cas échéant leur bijection réciproque.

1) $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$

2) $\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & x & \longmapsto & (x^2, e^x) \end{array}$

3) $\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & : & (x,y) & \longmapsto & (x+2y, 2x-y) \end{array}$

Exercice 3

On considère la fonction suivante : :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & : & (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, x+z, y+z) \end{array}$$

1. Déterminer les antécédants de $(3,0,0)$ par f.
2. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

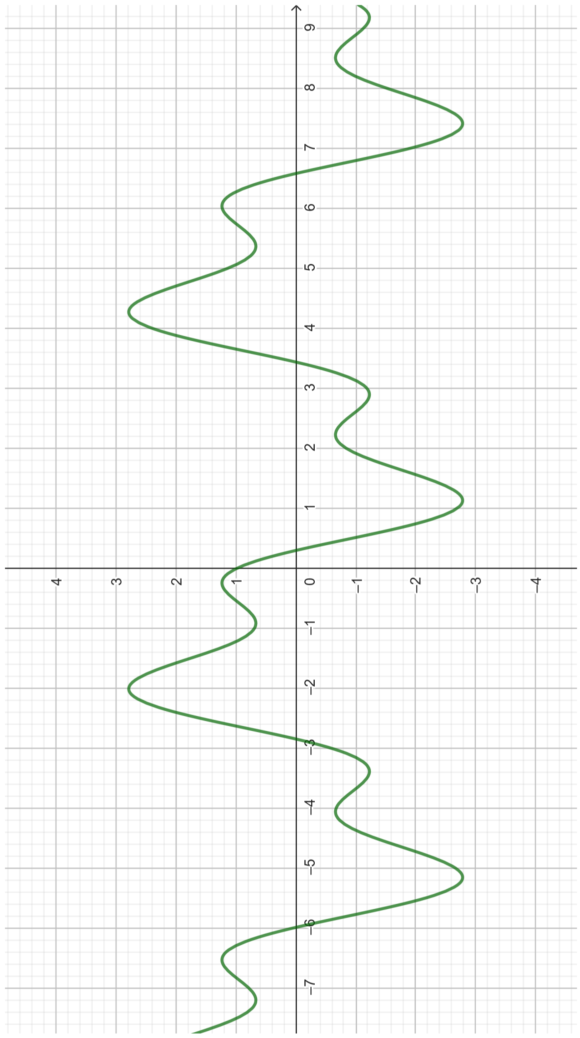
Exercice 4

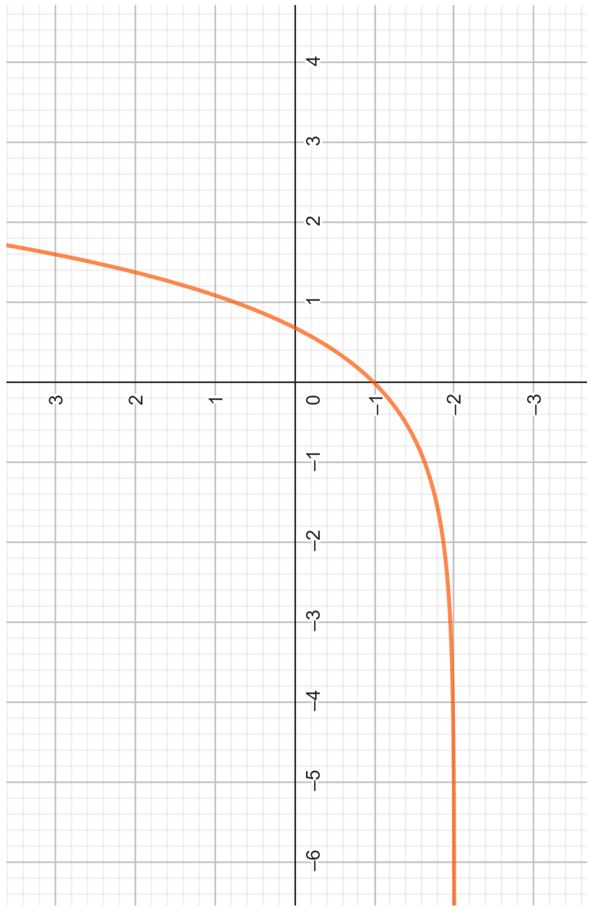
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $g \circ f$? Montrer que :

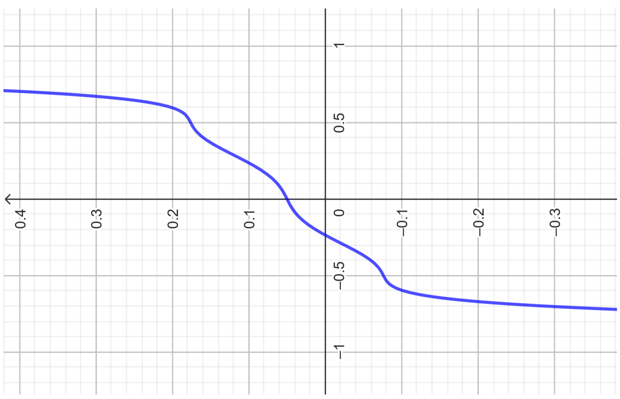
1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

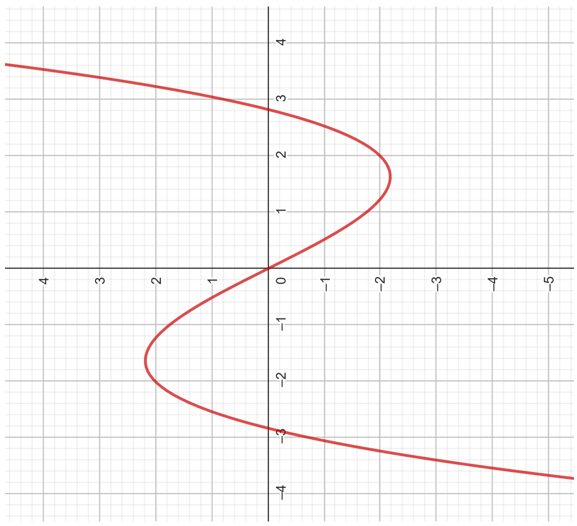
Exercice 5

La page ci-après présente (en mode paysage !) les graphes de quatre fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si ces fonctions sont injectives et/ou surjectives.









Exercice 6

1. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	0		1		6		$+\infty$
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Déterminer $f([0, 1[)$, $f([1, 6])$ et $f([1, +\infty[)$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Déterminer $g(]3, +\infty[)$ et $g(] - \infty, 3])$.

3. Soit $h : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	$+\infty$	$\searrow$	$0 \parallel 0$	$\searrow$	-2

Déterminer $h(]1, +\infty[)$ et $h(] - \infty, 1[)$.

Exercice 7

Soit la fonction numérique f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

1. Faire l'étude complète de f.
2. Donner l'allure du graphe de f et la vérifier à l'aide de GeoGebra (`https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`).
3. Déterminer par lecture graphique deux intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit une bijection.
4. Démontrer le résultat énoncé à la question précédente grâce à un théorème du cours.
5. Déterminer l'expression de $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 8

Soit th la fonction numérique donnée par

$$th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Faire l'étude de th.
2. Donner des intervalles I et J tels que $th : I \longrightarrow J$ soit une bijection.
3. Déterminer la bijection réciproque $th^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 9
Soit f la fonction numérique donnée par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{1+x}}.$$

1. Faire l'étude de f.
2. Donner des intervalles I et J tels que $f : I \longrightarrow J$ soit une bijection. *(On pourra vérifier sa réponse sur Geogebra avant de passer à la question suivante.)*
3. Déterminer la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = x^2 + \ln(x).$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x + x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation

$$(E_n)\ :\ f(x) = n.$$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera x_n.
2. Déterminer le sens de variation de (x_n).
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln n \geq x_n \geq \ln(n - \ln n).$$
4. En déduire la limite de (x_n) puis montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 12
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \geq 0,\ f_n(x) = e^{-x} - x^{2n-1}$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}^+$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(u_{n+1}) < 0$.
4. En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n-1}.$$
6. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 13
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = nx - e^{-x}.$$

1. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution $v_n \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 < v_n < \frac{1}{n}.$$
3. Qu'en déduit-on sur (v_n) ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{e^{-v_n}}{n}$.
5. En déduire un équivalent de v_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 14
Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} f_a & : & \mathbb{R}\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & : & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-a} + a \end{array}$$

1. Montrer que $Im(f_a) \subset \mathbb{R}\backslash\{a\}$.
2. Calculer $f_a \circ f_a$. Que peut-on en conclure ? Illustrer ce fait graphiquement.