4 Propriétés des bijections réciproques

4.1 Bijections et composition

Proposition 1
Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection, alors

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E.$$

Démontration : Pour $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$: Soit $y \in F$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a donc $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, cqfd.
Pour $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$: Soit $x \in E$. Par définition, $f^{-1}(f(x))$ est l'unique élément $x' \in E$ tel que $f(x') = f(x)$: c'est donc $x' = x$ i.e. $f^{-1}(f(x)) = x$ cqfd.

Exemple :

Proposition 2
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Si $g : F \longrightarrow E$ est telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f est bijective et $f^{-1} = g$

Démonstration : La bijectivité de f découle de l'exercice 4 du TD 10 : on utilise que les applications identités id_E et id_F sont bijectives pour dire que

- $g \circ f = \mathrm{id}_E$ est injective donc f est injective.
- $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est surjective donc f est surjective.

Ainsi f est bien bijective. Soit ensuite $y \in F$; on a $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_F(y)$ c'est-à-dire $f(g(y)) = y$ donc $g(y) \in E$ est un antécédent de y par f. Comme f est bijective, c'est que $g(y) = f^{-1}(y)$ cqfd.

Exemple :

Attention : il faut bien vérifier que la composée de f par g donne l'identité dans *les deux sens*. L'hypothèse $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ne suffit pas pour conclure. Par exemple :

Corollaire 1
Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration :

Corollaire 2
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections alors $g \circ f : \quad \longrightarrow \quad$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Démonstration :

4.2 Cas des fonctions réelles

Graphe de f^{-1} à partir du graphe de f :

Proposition 3
Soient I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Alors le graphe de $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple :

Dérivation de f^{-1} :

Proposition 4
Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow J$. On suppose que :

- f est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$ et
- f est une bijection

Alors $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J,\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration :

Exemple : la fonction tan : $\qquad \longrightarrow \qquad$ est bijective et sa bijection réciproque est arctan : $\quad \longrightarrow$
On a $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan'(x) =$
Donc la dérivée de la fonction arctan est donnée par :

Sens de variation de f^{-1} :

Proposition 5

Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Si f est strictement croissante *(respectivement décroissante)* sur I alors f^{-1} est strictement croissante *(respectivement décroissante)* sur J.

Démonstration :

Proposition 6
Soit $D \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à 0, et soit $f : D \longrightarrow f(D)$ une bijection impaire. Alors $f(D)$ est symétrique par rapport à 0 et $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ est impaire.

Démonstration :

Exemple :

Remarque : il n'y a pas d'analogue de ce théorème pour les fonction paires car