

Exercice 1 (Pièges du produit matriciel)

Dans chacun des cas suivants, calculer les produits matriciels demandés puis identifier une règle de calcul vraie pour les nombres réels qui n'est plus vraie pour les matrices.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB .

Moralité :

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC .

Moralité :

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA .

Moralité :

4. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer $(AB)^2$ et A^2B^2 .

Moralité :

5. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$.

Moralité :

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, lesquels des neuf produits formés à partir de deux des matrices suivantes sont réalisables ? Que valent alors ces produits (présentez vos résultats dans un tableau à double entrée) ?

$$1. \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AM = MA$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec B , c'est-à-dire telles que $BM = MB$.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A .
2. En déduire A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5

Déterminer M^n pour tout $n \geq 0$ dans chacun des cas suivants (on commencera par calculer à la main M^n pour de petites valeurs de n) :

$$1. \ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 2. \ M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 3. \ M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \right. \right.$$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer successivement A^2, A^3, A^4 et A^5 .
2. Émettre alors une conjecture sur l'expression de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

Exercice 7

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
2. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R(\theta)^n = R(n\theta)$.
3. (a) Que vaut $R(0)$?
 (b) Rappeler la *définition* d'une matrice inversible.
 (c) En utilisant la question 1 et la définition d'une matrice inversible, montrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et donner son inverse.
4. Retrouvez le fait que $R(\theta)$ est inversible ainsi que la valeur de $R(\theta)^{-1}$ grâce à une *propriété* du cours.

Exercice 8

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants grâce au binôme de Newton (a désigne un nombre complexe quelconque).

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 2. A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \left| \quad 3. A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \right. \right.$$

Exercice 9

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les matrices A^T , B^T , C^T , AA^T , CC^T et C^TC .

Exercice 10

Pour quels valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Donner alors son inverse.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse en fonction de A^2 , A et I_3 .
3. La matrice A^2 est-elle inversible ? Si oui, exprimer $(A^2)^{-1}$ en fonction de A^2 , A et I_3 .

Exercice 12

Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ les suites définies par $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Soit enfin $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire l'expression de X_n en fonction de A et de X_0 .
2. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
3. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En utilisant uniquement le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. On commencera par exprimer A en fonction de D , P et P^{-1} .
5. Conclure en donnant l'expression de u_n et v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 11 & -9 & 3 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
2. Calculer $B = P^{-1}AP$ et donner deux matrices D et N telles que $B = D + N$ avec D diagonale et N une matrice dont tous les coefficients sauf un sont nuls.
3. Calculer N^2 , DN et ND .
4. En déduire l'expression de B^n puis celle de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0$. Montrer que si A est nilpotente alors $I_n - A$ est inversible. *Indication : simplifier, pour $q \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, la quantité $(1 - q) \sum_{k=0}^m q^k$.*

Exercice 15

Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2. B = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

(pour $m \in \mathbb{R}$.)

$$3. C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

(pour $\lambda \in \mathbb{R}$.)

Exercice 16

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{C}$ la matrice $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 17

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1} .

2. Sans plus de calculs, résoudre le système $\begin{cases} x + 3y + 4z + 4t = -4 \\ x + y + 4z + t = -2 \\ x + 3y + 3z + 2t = 2 \\ x + 3y + 4z + 5t = 4 \end{cases}$

3. Sans plus de calculs, résoudre le système $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + y + 3z + 3t = 2 \\ 4x + 4y + 3z + 4t = 4 \\ 4x + y + 2z + 5t = 6 \end{cases}$