

**Exercice 1 (Pièges du produit matriciel)**

Dans chacun des cas suivants, calculer les produits matriciels demandés puis identifier une règle de calcul vraie pour les nombres réels qui n'est plus vraie pour les matrices.

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $AB$ .

Moralité :

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $AB$  et  $AC$ .

Moralité :

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $AB$  et  $BA$ .

Moralité :

4. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer  $(AB)^2$  et  $A^2B^2$ .

Moralité :

5. Mêmes matrices que dans le 3. Calculer  $(A+B)^2$  et  $A^2 + 2AB + B^2$ .

Moralité :

**Exercice 2**

Dans chacun des cas suivants, lesquels des neuf produits formés à partir de deux des matrices suivantes sont réalisables ? Que valent alors ces produits (présentez vos résultats dans un tableau à double entrée) ?

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 3**

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Déterminer toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire telles que  $AM = MA$ .
2. Soit  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminer toutes les matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $B$ , c'est-à-dire telles que  $BM = MB$ .

**Exercice 4**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$ .
2. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Exercice 5**

Déterminer  $M^n$  pour tout  $n \geq 0$  dans chacun des cas suivants (on commencera par calculer à la main  $M^n$  pour de petites valeurs de  $n$ ) :

1.  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$
3.  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 6**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer successivement  $A^2, A^3, A^4$  et  $A^5$ .
2. Émettre alors une conjecture sur l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Démontrer cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

**Exercice 7**

Pour  $\theta \in \mathbb{R}$  on considère la matrice  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

- Montrer que pour tous  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$ .
- En déduire que pour tout  $\theta \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}^*, R(\theta)^n = R(n\theta)$ .
- (a) Que vaut  $R(0)$  ?  
(b) Rappeler la *définition* d'une matrice inversible.  
(c) En utilisant la question 1 et la définition d'une matrice inversible, montrer que  $R(\theta)$  est inversible pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et donner son inverse.
- Retrouvez le fait que  $R(\theta)$  est inversible ainsi que la valeur de  $R(\theta)^{-1}$  grâce à une *propriété* du cours.

**Exercice 8**

Calculer  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$  dans chacun des cas suivants grâce au binôme de Newton ( $a$  désigne un nombre complexe quelconque).

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad 2. A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \left| \quad 3. A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \right.$$

**Exercice 9**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .  
Calculer les matrices  $A^T$ ,  $B^T$ ,  $C^T$ ,  $AA^T$ ,  $CC^T$  et  $C^TC$ .

**Exercice 10**

Pour quels valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$  est-elle inversible ?  
Donner alors son inverse.

**Exercice 11**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Calculer  $(A + I_3)^3$ .
- En déduire que  $A$  est inversible et déterminer son inverse en fonction de  $A^2$ ,  $A$  et  $I_3$ .
- La matrice  $A^2$  est-elle inversible ? Si oui, exprimer  $(A^2)^{-1}$  en fonction de  $A^2$ ,  $A$  et  $I_3$ .

**Exercice 12**

Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  les suites définies par  $u_0 = v_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on note  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ . Soit enfin  $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ . En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction de  $A$  et de  $X_0$ .
- Justifier que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
- Calculer la matrice  $D = P^{-1}AP$ , puis déterminer  $D^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- En utilisant uniquement le résultat de la question 3, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ . On commencera par exprimer  $A$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .
- Conclure en donnant l'expression de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 \\ 11 & -9 & 3 \\ 9 & -9 & 4 \end{pmatrix}$  et soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
2. Calculer  $B = P^{-1}AP$  et donner deux matrices  $D$  et  $N$  telles que  $B = D + N$  avec  $D$  diagonale et  $N$  une matrice dont tous les coefficients sauf un sont nuls.
3. Calculer  $N^2$ ,  $DN$  et  $ND$ .
4. En déduire l'expression de  $B^n$  puis celle de  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 14**

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est nilpotente lorsqu'il existe  $r \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^r = 0$ . Montrer que si  $A$  est nilpotente alors  $I_n - A$  est inversible. *Indication : simplifier, pour  $q \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ , la quantité  $(1 - q) \sum_{k=0}^m q^k$ .*

**Exercice 15**

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ .
2.  $B = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$   
(pour  $m \in \mathbb{R}$ .)
3.  $C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$  (pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .)

**Exercice 16**

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$  est-elle inversible ?
2. Pour quelles valeurs de  $m \in \mathbb{C}$  la matrice  $B = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix}$  est-elle inversible ?

**Exercice 17**

1. Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

2. Sans plus de calculs, résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 3y + 4z + 4t = -4 \\ x + y + 4z + t = -2 \\ x + 3y + 3z + 2t = 2 \\ x + 3y + 4z + 5t = 4 \end{cases}$$

3. Sans plus de calculs, résoudre le système 
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + y + 3z + 3t = 2 \\ 4x + 4y + 3z + 4t = 4 \\ 4x + y + 2z + 5t = 6 \end{cases}$$