
Mathématiques - mercredi 21 janvier 2025
Devoir n°5 Durée : 3 h

- **Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.**
- **Ce sujet compte 1 exercice et 1 problème indépendants. Il comporte 3 pages dont une annexe de rappels de Python.**
- **Pensez à vous relire et à encadrer les résultats à la fin de chaque exercice.**

Exercice.

Les quatre questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+n}{2^n-\ln(n)}$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-n^2$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.
2. Résoudre le système suivant en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$\begin{cases} 3x + y - z = \lambda x \\ 2x + 2y + 2z = \lambda y \\ -x + y + 3z = \lambda z \end{cases}$$
3. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
   (a) Faire l'étude de f.
   (b) Déterminer I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ les plus grands possibles tels que $f : I \longrightarrow J$ soit une bijection.
   (c) Déterminer alors l'expression de sa bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$.
4. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
   (a) Donner sans justifier les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction $g \circ f$.
   (b) On suppose que f et g sont injectives, montrer que $g \circ f$ l'est aussi.
   (c) On suppose que f et g sont surjectives, montrer que $g \circ f$ l'est aussi.

Problème de modélisation.

On étudie l'évolution d'une population de poissons dans un lac. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note u_n la biomasse de poissons (en tonnes) à la fin de la n-ième année.
Les phénomènes suivants sont pris en compte :

- en l'absence de contrainte, la biomasse augmente de 20 % par an ;
- la limitation des ressources entraîne une mortalité proportionnelle au carré de la biomasse avec un facteur $0,1$;
- une campagne de pêche annuelle prélève une quantité constante $p \geq 0$ de biomasse.

Cela revient donc à supposer que la biomasse de poisson à l'année $n+1$ est donnée par la relation : $u_{n+1} = u_n + 0{,}2\, u_n - 0{,}1\, u_n^2 - p$.
On suppose enfin qu'il y a initialement 1 tonne de poissons dans le lac.

Finalement, le modèle retenu pour cette situation est donc :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{6}{5}\,u_n - \frac{1}{10}\,u_n^2 - p$$

et on s'intéresse à l'évolution de la suite (u_n) lorsque $n \to +\infty$.

Dans tout le problème, on note $f_p : x \longmapsto \frac{6}{5}\,x - \frac{1}{10}\,x^2 - p$ la fonction telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_p(u_n)$.

Partie A.
Dans cette partie uniquement, on suppose qu'il n'y a pas de campagne de pêche c'est-à-dire que $p = 0$. La suite (u_n) est donc définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{6}{5}\,u_n - \frac{1}{10}\,u_n^2 = f(u_n)$$

où $f = f_0 : x \longmapsto \frac{6}{5}\,x - \frac{1}{10}\,x^2$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty, 6]$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ sous forme factorisée et en déduire le sens de variation de (u_n).
4. Conclure que (u_n) converge puis que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$. Interpréter ce résultat.

Partie B.
Dans cette partie, on étudie le cas où $0 < p \leq \frac{1}{10}$. On admet que, comme dans la partie A, f_p est croissante sur $]-\infty, 6]$ et que cela permet de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$. On pourra donc utiliser ces deux résultats sans démonstration dans toute cette partie.

5. Comparer u_1 et u_0 puis démontrer que (u_n) est croissante.
6. En déduire que (u_n) converge puis déterminer sa limite en fonction de p.
7. Que dire de la suite (u_n) lorsque $p = \frac{1}{10}$? Interpréter ce résultat.

Partie C.
Dans cette partie, on étudie le cas où $p > \frac{1}{10}$.

8. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) \leq x + \frac{1}{10} - p$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{10} - p$.
9. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_0 + n\left(\frac{1}{10} - p\right)$.
10. En déduire la limite de (u_n). Interpréter ce résultat.
11. Pour augmenter leur profit, les exploitants du lac envisagent de ne pêcher qu'une année sur deux en laissant les poissons se reproduire librement les années impaires. On souhaite comparer cette stratégie avec le modèle précédent où la pêche annuelle était constante et valait p.

    Dans la stratégie de jachère, la campagne de pêche vaut alternativement 0 (année sans pêche) et $2p$ (année de pêche double). Si l'on note v_n la biomasse de poissons à la fin de la $2n$-ième année, on a donc :

    $$v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = f_{2p}(f_0(v_n)).$$

    En menant un raisonnement similaire à celui utilisé dans cette partie, montrer que cette stratégie de jachère n'améliore pas le rendement, c'est-à-dire qu'on retrouve le critère $p \leq \frac{1}{10}$. *On réexploitera la question 8.*

Partie D.

Dans cette partie, on utilise l'outil informatique pour visualiser l'évolution de la biomasse de poissons prédite par le modèle et les données récoltées sur le terrain. *On signale qu'une annexe de rappels de Python est disponible en fin de sujet.*

12. On souhaite tout d'abord visualiser le modèle choisi pour une valeur de pêche p fixée.
Écrire une fonction `modèle` prenant en argument un nombre réel p et un entier N et renvoyant la liste $[u_0,\ u_1,\ \dots,\ u_N]$.
13. En utilisant la fonction précédente, tracer le graphe de la suite (u_n) pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et $p = 0,05$.

En pratique, la pêche annuelle n'est pas réellement constante. Les exploitants du lac inscrivent chaque année la biomasse de poissons pêchée dans un fichier texte `data.txt` composé de deux lignes.
La première ligne renseigne uniquement l'année (nous ne l'exploiterons pas), et la deuxième indique la biomasse pêchée pendant l'année exprimée en **kilogrammes**. Les données des années successives sont séparées par un espace. Par exemple, après quatre années d'exploitation le fichier `data.txt` pourrait contenir

```
2022  2023  2024  2025
58  110  71  92
```

On souhaite convertir ces données en une liste Python.

14. Écrire un programme permettant de récupérer une chaîne de caractère, qu'on appellera `pêches`, correspondant à la deuxième ligne du fichier `data.txt`. Votre programme devra ouvrir le fichier, le lire, puis le fermer. Par exemple dans l'exemple fourni, votre programme doit permettre de définir `pêches` comme étant la chaîne `"58 110 71 92"`.
15. Compléter la fonction `ch_vers_list` ci-contre pour qu'elle prenne en argument une chaîne de caractères contenant des chiffres et des espaces et qu'elle renvoie la liste constituée des différents nombres que contient la chaîne.
Par exemple, avec la chaîne de caractères `ch = "58 110 71 92"`, appeler `ch_vers_list(ch)` doit renvoyer la liste `[58, 110, 71, 92]`.
On recopiera l'entièreté de la fonction sur la copie.

```
def ch_vers_list(ch):
    L = __________
    nb = ""
    for x in ch:
        if x != " ":
            nb = __________
        else :
            p = int(nb)
            __________
            __________
    p = int(nb)
    __________
    return L
```

16. En utilisant la fonction `ch_vers_list` et la chaîne de caractères `pêches` définie à la question 13, écrire un programme calculant l'évolution de la biomasse de poissons dans le lac en supposant que chaque année la relation $u_{n+1} = f_p(u_n)$ s'applique avec la n-ième valeur de pêche p indiquée dans le fichier `data.txt`.

Annexe : rappels de Python

- `f = open("monfichier.txt", "r")` ouvre le document intitulé `monfichier.txt` (en mode lecture) ; le fichier est alors désigné par la variable `f`.
- `f.read()` lit l'intégralité du contenu du fichier `f` et le renvoie sous forme d'une chaîne de caractères.
- `f.readline()` lit la première ligne du fichier `f` et la renvoie sous forme d'une chaîne de caractères. Ré-exécuter `f.readline()` lit alors la deuxième ligne ; et ainsi de suite.
- `f.close()` ferme le fichier `f`.
- `int(ch)` transforme la chaîne `ch` en un entier, par exemple `int("42")` renvoie `42`.