DS 5 - Corrigé

Exercice

1) a) $\dfrac{3^n+n}{2^n-\ln(n)} = \dfrac{3^n\left(1+\frac{n}{3^n}\right)}{2^n\left(1-\frac{\ln(n)}{2^n}\right)} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \times \dfrac{1+\frac{n}{3^n}}{1-\frac{\ln(n)}{2^n}}$

avec $\dfrac{n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{\ln(n)}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

et $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $\dfrac{3}{2}>1$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n+n}{2^n-\ln(n)} = +\infty}$

b) $n^2\cos\left(\frac{1}{n}\right)-n^2 = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$

Or $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$ donc $n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\cos\left(\frac{1}{n}\right)-n^2 = -\dfrac{1}{2}}$

c) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

Or $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(1)$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = e}$

2) $\begin{cases} 3x+y-z=\lambda x \\ 2x+2y+2z=\lambda y \\ -x+y+3z=\lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} (3-\lambda)x+y-z=0 \\ 2x+(2-\lambda)y+2z=0 \\ -x+y+(3-\lambda)z=0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-y+(\lambda-3)z=0 \\ 2x+(2-\lambda)y+2z=0 \\ (3-\lambda)x+y-z=0 \end{cases}$ $(L_1 \leftrightarrow L_3$ puis $L_1 \leftarrow -L_1)$

$\iff \begin{cases} x-y+(\lambda-3)z=0 \\ (4-\lambda)y+(8-2\lambda)z=0 & (L_2 \leftarrow L_2-2L_1) \\ (4-\lambda)y+((\lambda-3)^2-1)z=0 & (L_3 \leftarrow L_3-(3-\lambda)L_1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + (\lambda-3)z = 0 \\ (4-\lambda)y + (8-2\lambda)z = 0 \\ \Lambda z = 0 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{cases} \quad (*)$$

avec $\Lambda = ((\lambda-3)^2 - 1) - (8-2\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$

Comme $\lambda^2 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 4$, on distingue les cas suivants :

• si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,4\}$, alors $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = (3-\lambda)z + y = 0 \\ y = -\dfrac{(8-2\lambda)}{4-\lambda} z = -2z = 0 \\ z = \dfrac{0}{\Lambda} = 0 \end{cases}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}}$.

• si $\lambda = 0$, alors $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 4y + 8z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z + y = z \\ y = -2z \end{cases}$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$.

• si $\lambda = 4$, alors $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y - z$

donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S} = \{(y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}}$.

3) a) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{(2e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (2e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{2e^{2x} + 1 + 2 + e^{-2x} - (2e^{2x} - 1 - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

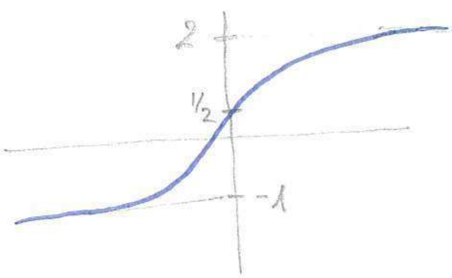
$$= \boxed{\frac{6}{(e^x + e^{-x})^2}} > 0$$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limite en $+\infty$: $f(x) = \dfrac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2$ car $e^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Limite en $-\infty$: $f(x) = \dfrac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1$ car $e^{2x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$

D'où le tableau de variations et le graphe suivants (on a calculé $f(0) = \frac{1}{2}$)

x	$-\infty$	$+\infty$
f	-1 $\nearrow$	2



b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut lire dans son tableau de variations que $f(\mathbb{R}) =]-1, 2[$.

Comme de plus f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ est une bijection.

Finalement $\boxed{f : \mathbb{R} \to]-1, 2[\text{ est une bijection}}$.

c) Déterminons $f^{-1} :]-1, 2[\to \mathbb{R}$. Soit $y \in]-1, 2[$, on résout pour $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = y \iff \dfrac{2e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff 2e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x})$ (correct car $e^x + e^{-x} \neq 0$)

$\iff (2-y)e^x = (1+y)e^{-x} \iff e^{2x} = \dfrac{1+y}{2-y}$ (correct car $y \neq 2$)

$\iff 2x = \ln\left(\dfrac{1+y}{2-y}\right)$ (correct car $1+y > 0$ et $2-y > 0$)

$\iff x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{2-y}\right)$

Finalement
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} &:]-1, 2[\to \mathbb{R} \\ &: y \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{2-y}\right) \end{aligned}}$$.

4) a) $\boxed{g\circ f : E \to G}$

b) Soient $x, x' \in E$ tels que $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(x')$ c'est-à-dire $g(f(x)) = g(f(x'))$

Comme g est injective, cela implique que $f(x) = f(x')$.
Puis comme f est injective, cela implique que $x = x'$.
Ainsi on a montré que $(\forall x, x' \in E,\ (g\circ f)(x) = (g\circ f)(x') \Rightarrow x = x')$ donc
$g\circ f$ est injective.

c) Soit $y \in G$. Comme g est surjective, il existe $a \in F$ tel que $y = g(a)$.
Puis comme f est surjective il existe $x \in E$ tel que $a = f(x)$.
Dès lors $y = g(a) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$.
Ainsi on a montré que $(\forall y \in G, \exists x \in E : y = (g\circ f)(x))$ donc
$g\circ f$ est surjective.

Problème de modélisation :

Partie A

1) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{6}{5} - \frac{2}{10}x = \frac{6-x}{5} \geqslant 0 \iff x \leqslant 6$$

Donc f est croissante sur $]-\infty, 6]$.

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leqslant 2$.

Tout d'abord pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [1, 2]$.
Supposons ensuite que $1 \leq u_n \leq 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme
f est croissante sur $]-\infty, 6]$, donc en particulier sur $[1, 2]$, cela
implique que $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$.
Or $f(1) = \frac{6}{5} - \frac{1}{10} = \frac{11}{10} \geqslant 1$; $f(2) = \frac{12}{5} - \frac{4}{10} = 2$ et $f(u_n) = u_{n+1}$
Donc $1 \leq u_{n+1} \leqslant 2$ ce qu'il fallait démontrer.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6}{5}u_n - \frac{1}{10}u_n^2 - u_n = \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{10}u_n^2 = \frac{1}{10}u_n(2-u_n)$$

Or d'après la question précédente $1 \leq u_n \leq 2$ donc $u_n \geq 0$ et $2-u_n \geq 0$.

Par produit on a donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

4) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc elle converge.

Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En passant à la limite dans la relation

$u_{n+1} = \frac{6}{5}u_n - \frac{1}{10}u_n^2$ on trouve que :

$$\ell = \frac{6}{5}\ell - \frac{1}{10}\ell^2 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\ell - \frac{1}{10}\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}\ell(2-\ell) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\ell = 0 \text{ ou} \\ \ell = 2\end{array}\right)$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$, la limite $\ell = 0$ est exclue.

C'est donc que $\ell = 2$, ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2}$.

Interprétation : En l'absence de pêche, le modèle prédit que la population de poissons dans le lac augmente jusqu'à se stabiliser à une biomasse de 2 tonnes.

Partie B

5) On a $u_1 = f_p(u_0) = f_p(1) = \frac{6}{5} - \frac{1}{10} - p = \frac{11}{10} - p$

Comme $p \leq \frac{1}{10}$ on a donc $u_1 \geq \frac{11}{10} - \frac{1}{10} = 1$ ainsi $\boxed{u_1 \geq u_0}$.

Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Le cas $n = 0$ vient d'être établi.

Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme l'énoncé a admis que f_p était croissante sur $]-\infty, 6]$, et que la suite (u_n) est à valeurs dans $[1,2]$, donc plus généralement dans $]-\infty, 6]$, on peut en déduire que $f_p(u_{n+1}) \geq f_p(u_n)$ c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, (u_n) est croissante.

6) La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 (ce dernier point étant admis par l'énoncé) donc elle converge. Notons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{6}{5}u_n - \frac{1}{10}u_n^2 - p$ on trouve que :

$$l = \frac{6}{5}l - \frac{1}{10}l^2 - p \iff \frac{1}{10}l^2 - \frac{1}{5}l + p = 0$$
$$\iff l^2 - 2l + 10p = 0 \quad (*)$$

Le discriminant du polynôme $X^2 - 2X + 10p$ est $\Delta = 4 - 40p$
$= 4(1-10p)$

Comme $p \leq \frac{1}{10}$, on a $1 - 10p \geq 0$ donc $\Delta \geq 0$ ainsi :

$$(*) \iff l = \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2} \text{ ou } l = \frac{2-\sqrt{\Delta}}{2}$$
$$\iff l = 1 + \sqrt{1-10p} \text{ ou } l = 1 - \sqrt{1-10p}$$

Par ailleurs, le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ implique que $l \geq 1$.
Comme $1 - \sqrt{1-10p} < 1$ (sauf pour $p = \frac{1}{10}$, voir question 7), cette valeur est rejetée et on retient seulement $l = 1 + \sqrt{1-10p}$.

Finalement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 + \sqrt{1-10p}}$

7) Dans le cas où $p = \frac{1}{10}$, on constate comme vu à la question 5 que

$u_1 = f_p(u_0) = f_p(1) = \frac{11}{10} - p = \frac{11}{10} - \frac{1}{10} = 1 = u_0$

Cela implique par une récurrence immédiate que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1}$.

Interprétation : Selon ce modèle, si on pêche $p = 0{,}1$ tonne de poissons chaque année alors la compétition et la pêche compensent exactement l'augmentation de 20% de la biomasse sans contrainte et la population de poissons dans le lac reste à un niveau constant.

Partie C

8) Pour $x \in \mathbb{R}$ on calcule que

$$x + \frac{1}{10} - p - f_p(x) = x + \frac{1}{10} - p - \frac{6}{5}x + \frac{1}{10}x^2 + p = \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{10}(x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{10}(x-1)^2 \geq 0$$

donc $\boxed{f_p(x) \leqslant x + \frac{1}{10} - p}$. Comme $u_{n+1} = f_p(u_n)$, en prenant $x = u_n$ on obtient $\boxed{u_{n+1} \leqslant u_n + \frac{1}{10} - p}$.

9) D'après la question 8, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k \leqslant \frac{1}{10} - p$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10} - p\right)$
Or par télescopage, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10} - p\right) = n\left(\frac{1}{10} - p\right)$
Donc $u_n - u_0 \leqslant n\left(\frac{1}{10} - p\right)$ donc $\boxed{u_n \leqslant u_0 + n\left(\frac{1}{10} - p\right)}$.

10) Comme $p > \frac{1}{10}$ on a $\frac{1}{10} - p < 0$ donc $u_0 + n\left(\frac{1}{10} - p\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.
Par théorème de comparaison, l'inégalité $u_n \leqslant u_0 + n\left(\frac{1}{10} - p\right)$ implique donc que : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$.

Interprétation : Selon ce modèle, lorsque la biomasse pêchée est supérieure à 0,1 tonne, la population de poissons s'éteint (outre le fait que $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, voyons surtout qu'à partir d'un certain rang $u_n \leqslant 0$ donc qu'il n'y a plus de poissons dans le lac et que u_n ne représente plus une biomasse, qui ne saurait être négative).

11) D'après la question 8 avec $2p$ à la place de p et $f_0(x)$ à la place de x on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{2p}(f_0(x)) \leqslant f_0(x) + \frac{1}{10} - 2p$
Mais grâce à cette même question avec $p = 0$ on a aussi $f_0(x) \leqslant x + \frac{1}{10}$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{2p}(f_0(x)) \leqslant x + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - 2p = x + 2\left(\frac{1}{10} - p\right)$
En suivant le même raisonnement qu'aux questions précédentes, cela implique que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0 + 2n\left(\frac{1}{10} - p\right)$ de sorte que si $p > \frac{1}{10}$ alors à nouveau $\boxed{v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty}$ et la population s'éteint.

Partie D

12)
```
def modele(p, N):
    u = 1
    L = [1]
    for k in range(N):
        u = 6*u_n/5 - u_n**2/10 - p
        L.append(u)
    return L
```

13)
```
import matplotlib.pyplot as plt
N = 10
p = 0.05
absi = [k for k in range(N+1)]
ordo = modele(p, N)
plt.plot(absi; ordo)
plt.show()
```

14)
```
f = open("data.txt", "r")
ligne1 = f.readline()
pêches = f.readline()
f.close()
```

15)
```
def ch_vers_list(ch):
    L = []    # on initialise L à la liste vide
    nb = ""
    for x in ch:
        if x != " ":
            nb = nb + x        # à cette ligne on construit la chaîne nb
                               # qui contiendra un des nombres de ch
        else:
            p = int(nb)        # on convertit nb en un nombre p
            L.append(p)        # on ajoute p dans la liste L
            nb = ""            # puis on réinitialise nb à la chaîne
                               # vide en vu du prochain nombre
    p = int(nb)
    L.append(p)                # les deux avant dernières lignes font
                               # l'opération décrite dans le "else" pour le
    return L                   # dernier nombre de ch
```

16) On propose de stocker l'évolution de la biomasse de poissons dans une liste L comme fait à la question 12).

```
u = 1
L = [1]
Lp = ch_vers_list(pêches)
N = len(Lp)
for k in range(N) :
    p = Lp[k]
    u = 6/5 * u - 1/10 * u ** 2 - p * 0.001    # Attention, p doit être exprimé en tonnes pas en kg
    L.append(u)
```

Remarques sur le problème de modélisation

- Il était aussi possible de faire :
  - une étude de fonction à la question 8
  - une récurrence à la question 9
- La partie D est très largement inspirée de l'épreuve de modélisation donnée à Agro-Véto en 2021.
- Le thème du problème, et la question 11 en particulier, relèvent d'une approche économique, axée vers la rentabilité, du métier d'ingénieur agronome. Signalons que ce n'est là qu'un seul volet - d'ailleurs souvent remis en question - de ce métier auquel forment de nombreuses écoles accessibles par la BCPST. Pour ne citer qu'un exemple, l'école "AgroParisTech" déclare sur son site Internet avoir l'ambition de "participer à la création d'un monde soutenable, dans la droite ligne des Objectifs de Développement Durable (ODD) de l'ONU" et forme donc ses étudiants à "la compréhension et la lutte contre le changement global ; la préservation des ressources, la réduction des inégalités de territoires, l'accès à la santé et à une alimentation durable pour tous". Bien d'autres aspects que ceux présentés dans ce problème rentrent donc en jeu pour décider si $p = \frac{1}{10}$!