Calcul de primitives

Rappel :

- Une primitive de f sur I est

- On parle bien d'**une** primitive car si F est une primitive de f sur I alors les primitives de f sur I sont les

Exemple important :

- Donner une primitive de $f : x \longmapsto \cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

- Que pensez-vous du raisonnement suivant pour trouver une primitive de $f : x \longmapsto \cos(x^2)$?

$$\text{« } \textit{Une primitive de } \cos \textit{ est } \sin\textit{, et comme la dérivée de } x \longmapsto x^2 \textit{ est } x \longmapsto 2x\textit{,}$$
$$\textit{alors une primitive de } f : x \longmapsto \cos(x^2) \textit{ est } F : x \longmapsto \frac{\sin(x^2)}{2x} \text{ »}$$

Moralité : En fait, on ne peut intégrer $f(u(x))$ en $\dfrac{F(u(x))}{u'(x)}$ que si

C'est donc que de manière générale, il faut reconnaître une expression du type $u'(x)f(u(x))$ pour pouvoir l'intégrer en $F(u(x))$ (et non du type $f(u(x))$).

1 Primitives par composée

Rappel : Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F : u(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables alors la fonction $F \circ u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $(F \circ u)' = u' \times (F' \circ u)$.

Ainsi, si on reconnaît un “motif” en $u'(x)F'(u(x))$ on peut intégrer en $F(u(x)) + c$!

“motif” en $u'(x)F'(u(x))$	Primitive en $F(u(x)) + c$	valable sur tout intervalle où
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable
$u'(x)\ u(x)^n\ (n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq -2)$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$		u dérivable et strictement négative
$u'(x)\ u(x)^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	u dérivable et ne s'annule pas
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$		u dérivable et strictement positive
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$		u dérivable et ne s'annule pas
$u'(x)\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	u dérivable
$u'(x)\ \sin(u(x))$		u dérivable
	$\sin(u(x)) + c$	u dérivable
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2+1}$	$\arctan(u(x)) + c$	u dérivable

Exemples : Compléter selon le schéma proposé pour f_1 :

1. Les primitives de $f_1 : x \longmapsto xe^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les

$$F_1 : x \longmapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en
$u(x) = -x^2$	$f_1(x) = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$	$F_1(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} + c$

Vérification : $F_1'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} = f_1(x)$

2. Les primitives de $f_2 : x \longmapsto \cos(x)\sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

3. Les primitives de $f_3 : x \longmapsto \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+1}$ sur $\mathbb{R}$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

4. Les primitives de $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

5. Les primitives de $f_5 : x \longmapsto \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ sont les

car en effet :

si on note	on reconnaît que	donc on intègre en

Vérification :

Exercice 2
Donner les primitives des fonctions suivantes sur les intervalles demandés.

1. (a) $f_1 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)^5$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $f_2 : x \longmapsto x\cos(x^2)$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $f_3 : x \longmapsto e^{\cos(x)}\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
   (d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$
   (e) $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0,\pi[$
   (f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)^4}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$

2. (a) $g_1 : x \longmapsto x\sin(2x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$
   (b) $g_2 : x \longmapsto xe^{2x^2}$ sur $\mathbb{R}$
   (c) $g_3 : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
   (d) $g_4 : x \longmapsto \tan(x)$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$
   (e) $g_5 : x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ sur $\mathbb{R}$