Programme de colles : semaine 15, du 26/1 au 30/1

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications

Dans tout ce qui suit $f : E \longrightarrow F$. On ne fait pas de distinction entre fonction et application. La notion d'image réciproque d'une partie de l'ensemble d'arrivée n'est pas un attendu du programme. Conformément au programme, on évitera tout "excès de formalisme" impliqué par des exercices trop abstraits.

- notion d'application, ensembles de définition et d'arrivée, image et antécédent, représentation graphique dans le cas d'une fonction numérique. On note F^E l'ensemble des fonctions de E dans F
- composition, on note id_E la fonction identité sur E
- image directe $f(A)$ d'un ensemble $A \subset E$, détermination graphique dans le cas d'une fonction numérique. On note $Im(f) = f(E)$
- injectivité/surjectivité : savoir montrer qu'une fonction est ou n'est pas injective/surjective.
- la fonction $f : E \longrightarrow Im(f)$ est toujours surjective
- bijectivité : savoir montrer qu'une fonction f est bijective en montrant que pour tout $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x \in E$
- théorème de la bijection : si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ alors f est injective, de plus si f est continue sur I alors $J = f(I)$ est un intervalle et $f : I \longrightarrow J$ est une bijection.
- on note $f^{-1} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque d'une bijection $f : E \longrightarrow F$. Savoir déterminer l'expression d'une bijection réciproque en résolvant pour $y \in F$ l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$
- si $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors on a $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.
- soit $f : E \longrightarrow F$. Si $g : F \longrightarrow E$ est telle que $f \circ g = id_E$ et $g \circ f = id_F$ alors f est bijective et $g^{-1} = f$. En particulier, $(f^{-1})^{-1} = f$
- si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont bijectives alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- graphe de f^{-1} en fonction du graphe de f
- si $f : D \longrightarrow f(D)$ est impaire et bijective sur $D \subset \mathbb{R}$ alors $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ est impaire
- si $f : I \longrightarrow J$ est strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et bijective alors $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est strictement monotone, de même sens de variation que f
- Dérivée de f^{-1}, exemple de $\arctan'$
- Exemples d'études de suites définies implicitement par une relation du type $u_n = f^{-1}(n)$ ou $u_n = f_n^{-1}(0)$

2 Matrices

Attention : *les points suivants n'ont pas encore été abordés en classe : matrices inversibles, transposée, lien entre matrices et systèmes linéaires, rang d'une matrice.*

- on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- matrices lignes, colonnes, carrées, nulle, triangulaires, diagonales. On note $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale de coefficients $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
- matrice identité, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$
- opérations matricielles : somme, multiplication par un scalaire, produit, puissance
- produit et puissance de matrices diagonales
- pièges du produit matriciel : en général $AB \neq BA$, $(AB)^p \neq A^p B^p$ et $\big(AB = AC$ et $A \neq 0\big) \not\Longrightarrow B = C$
- formule du binôme de Newton : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- exemples de calculs de puissances de matrices par récurrence.

3 Informatique en langage Python

Chaînes de caractères :

- accès aux éléments, concaténation, fonction `len`, caractère non mutable
- parcours par indices et par éléments
- création d'une chaîne depuis la chaîne vide `c = ""` par ajouts successifs `c = c + ...`
- fonction `print`
- lecture et écriture dans un fichier. *Si un exercice concernant la lecture ou l'écriture dans un fichier est donné, toutes les commandes utiles seront rappelées.*

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soit $f : E \longrightarrow F$. Donner la définition de "f est injective" et/ou de "f est surjective" et/ou de "f est bijective".
2. Donner un exemple de fonction qui soit à la fois (non) surjective et (non) injective *(avec des parenthèses choisies par l'examinateur).*
3. Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f(2) = 1$, 1 est un antécédent de 3 par f et 4 n'a pas d'antécédent par f *(ou toutes autres conditions similaires choisies par l'examinateur).*
4. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$. Après avoir rappelé les ensembles de départ et d'arrivée de $g \circ f$, montrer un des deux énoncés suivants (au choix de l'examinateur) :
   (a) si $g \circ f$ est injective alors f est injective,
   (b) si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
5. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection entre deux intervalles I et J telle que f' ne s'annule pas. On admet que f^{-1} est dérivable sur J. Énoncer la formule donnant $(f^{-1})'$.
6. Montrer que $P(X) = X^3 - 3X + 1$ admet 3 racines réelles.
7. Donner la définition du produit matriciel.
8. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ alors $(AB)C = A(BC)$.
9. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices *(à l'attention des élèves : attention, citer les hypothèses adéquates est également un attendu de cette question).*
10. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^p pour tout $p \geq 2$ en utilisant le binôme de Newton.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 8 et 9 (calcul de primitives, y compris celles de la forme $u' f(u)$), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6801`
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6867`

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.