

TD 11 exo 6

$$1) A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 31 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

2) Il semble donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

3) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Tout d'abord pour $n=0$,

• d'une part $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

• d'autre part $\begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

} donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons ensuite que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2^n \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } x = 1 + 2(2^n - 1) = 1 + 2^{n+1} - 2 = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{donc } A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

exo 3.2

Notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a :

$$BM = MB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 2c & c+2d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+c = 2a \\ 2b+d = a+2b \\ 2c = 2c \\ 2d = c+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=d \end{cases}$$

Donc l'ensemble des matrices qui commutent avec B est

$$\mathcal{Y} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

exo 8:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + aJ \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $J^2 = 0$ et donc $\forall k \geq 2, J^k = 0$

Comme $I_2 \times aJ = aJ = aJ \times I_2$, I_2 et aJ commutent donc, pour $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = (I_2 + aJ)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_2^{n-k} (aJ)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k J^k$$

$$= \binom{n}{0} a^0 J^0 + \binom{n}{1} a^1 J^1 + 0 \text{ car } \forall k \geq 2, J^k = 0$$

$$= I_2 + naJ = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3 + J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\forall k \geq 3, J^k = 0$. aI_3 et J comm. donc

$$\forall n \geq 0, A^n = (aI_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_3)^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} J^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} J^2 + 0 \text{ car } \forall k \geq 3, J^k = 0$$

$$= a^n I_3 + na^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} J^2$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} = aI_3 + J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\forall k \geq 1, J^k = 3^{k-1} J$, aI_3 et J commutent donc $\forall n \geq 0$,

$$A^n = (aI_3 + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (aI_3)^{n-k} J^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} 3^{k-1} J + \binom{n}{0} a^n J^0$$

$$= a^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} 3^{k-1} - \binom{n}{0} a^n \frac{1}{3} \right) J = a^n I_3 + \left(\frac{1}{3} (a+3)^n - a^n \right) J$$

$$= a^n I_3 + \frac{(a+3)^n - a^n}{3} J = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix} \text{ où } y_n = \frac{(a+3)^n - a^n}{3} \text{ et } x_n = y_n + a^n = \frac{(a+3)^n + 2a^n}{3}$$