Feuille de cours 11 : matrices et systèmes linéaires

4.1 Écriture matricielle des systèmes linéaires

Fait 1
Soient $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ des éléments de $\mathbb{K}$, alors

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{1,1}x_1 & +\cdots+ & a_{1,p}x_p & =b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +\cdots+ & a_{n,p}x_p & =b_n \end{array}\right. \iff AX=Y$$

où $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
et $Y=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Exemple 1
Écrire sous forme matricielle les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{lllll} 2x & - & 3y & + & z & =1 \\ x & & & + & 2z & =0 \end{array}\right. \iff AX=Y$ avec

2. $\left\{\begin{array}{llll} 3x & - & y & =1 \\ & & 2y & =2 \\ x & - & 3y & =0 \end{array}\right. \iff AX=Y$ avec

La notation matricielle permet de retrouver le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire grâce aux règles sur les opérations matricielles.

Définition 1 (rappel)
Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Le système homogène (ou équation matricielle homogène) associé au système (ou équation matricielle) $AX=Y$ est

Théorème 2
Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si le système $AX=Y$ est compatible (i.e. si) et si $X_0\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ en est une solution, alors l'ensemble des solutions de $AX=Y$ est

$$\mathcal{S}=\{X_0+X_h\ ,\ X_h\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } AX_h=0\}.$$

démonstration :

4.2 Résolution d'un système linéaire : écriture matricielle

Si on écrit un système linéaire sous la forme $AX = Y$, que deviennent les matrices A, X et Y au cours de la résolution du système par la méthode du pivot de Gauss ?

Exemple 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ -3x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 2x & - & y & & & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right.$$

Ainsi seules les matrices A et Y sont changées au cours de la résolution. De plus, on fait les mêmes opérations sur A et sur Y.
On peut donc résoudre un système linéaire en travaillant uniquement sur les lignes de ces deux matrices. Dans l'exemple précédent :

Lorsqu'on arrive à un système échelonné écrit sous la forme $AX = Y$, on dit que la matrice A est échelonnée. En d'autres termes :

Définition 3
Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite échelonnée lorsque chacune de ses lignes commence par strictement plus de coefficients nuls que la ligne précédente, i.e. lorsqu'elle est de la forme :

Définition 4
On appelle pivot d'une matrice échelonnée le premier coefficient non nul de chacune de ses lignes.

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Une fois arrivé à une forme échelonnée, comment finir matriciellement la résolution du système linéaire ?

Dans l'exemple 2, on cherche à trouver les valeurs de x, y et z. Quelle est l'écriture matricielle du système $\begin{cases} x & = & a \\ y & = & b \\ z & = & c \end{cases}$?

On continue donc les opérations élémentaires (mais cette fois-ci   ) jusqu'à obtenir la matrice I_3 à gauche :

Méthode : Dans le cas d'un système carré, sans équation de compatibilité, pour finir la résolution matricielle d'un système linéaire depuis une forme échelonnée, on effectue :

- des dilatations sur ses lignes ($L_i \longleftarrow \lambda L_i$) pour obtenir des pivots égaux à 1, et
- des transvections sur ses lignes, de bas en haut

Jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche. On arrive alors à un système du type $I_n X = Z$ c'est-à-dire

Remarque : Dans le cas d'un système non carré, ou avec des équations de compatibilité, revenir à l'écriture sous forme de système d'équations et terminer la résolution sans écriture matricielle.

Exemple 4
Résoudre matriciellement le système : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & -1 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & 3 \end{array}\right.$

4.3 Rang d'une matrice

L'algorithme du pivot de Gauss décrit une méthode pour transformer n'importe quel système linéaire en un système échelonné. Matriciellement, on en déduit que :

Proposition 5
Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut être transformée en une matrice échelonnée $\tilde{A}$ par une suite d'opérations élémentaires sur ses lignes. On dit que $\tilde{A}$ est une **réduite de Gauss** de A.

Définition 6
On *admet* que toutes les réduites de Gauss d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont le même nombre de pivots. Ce nombre est appelé **rang** de A et on le note $\text{rg}(A)$.

Remarque 7
Le rang de la matrice A est le rang de tout système linéaire s'écrivant $AX = Y$. En effet, le nombre de pivots dans une réduite de Gauss de A, ou dans une forme échelonnée du système $AX = Y$ ne dépend pas du second membre Y !

Exemple 5
Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 8
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

1. $\text{rg}(A) \leq n$
2. $\text{rg}(A) \leq p$
3. $\text{rg}(A^T)$=$\text{rg}(A)$

démonstration : Les points 1 et 2 viennent du fait qu'il ne peut pas y avoir plus de pivots que de lignes ou de colonnes de A.
Le point 3 est admis.

4.4 Cas des systèmes de Cramer

Rappel : un système linéaire à p inconnues et n équations est dit de Cramer lorsque :

-
-

Matriciellement, le système $AX = Y$ est de Cramer lorsque :

-
-

Proposition 9
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a équivalence entre :

i) rg(A)=n,
ii) Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = Y$ est de Cramer, et
iii) A est inversible.

démonstration :

Moralité : Pour savoir si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible :

-
-
-

Dans le cas où A est inversible, alors pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$AX = Y \iff$$

Le rang, calculé via la méthode de Gauss, permet donc de savoir si une matrice A est inversible. Mais la méthode de Gauss, va plus loin : elle permet d'obtenir l'inverse de A.

4.5 Calcul de l'inverse par pivot de Gauss

Calculer l'inverse d'une matrice peut être fait en résolvant un système linéaire. Pour comprendre pourquoi, il est essentiel de remarquer le fait suivant :

Remarque 10
Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par les valeurs prises par MY pour $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque.

Exemple 6
Si pour tout $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on a $MY = \begin{pmatrix} 2b_1 - b_2 + b_3 \\ b_2 + b_3 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}$ alors c'est que $M =$

Ainsi, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, pour déterminer A^{-1}, on peut utiliser que pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A^{-1}Y$ est la solution de $AX = Y$.

<u>Méthode :</u>

1. on pose $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ quelconque.
2. on résout $AX = Y$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on trouve une unique solution $X = A^{-1}Y$
3. on lit les coefficients de A^{-1} sur l'expression de $A^{-1}Y$
4.

L'étape 2 se fait par pivot de Gauss, soit sur le système, soit sur la forme matricielle. Au cours de cette étape, on trouve d'abord la forme échelonnée de A sur laquelle on lit si A est inversible ou non.

Lorsqu'on résout le système $AX = Y$ pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on fait les mêmes opérations sur les lignes du second membre Y que sur celles de la matrice A. On peut donc également présenter matriciellement ces opérations sur le second membre en l'écrivant sous la forme BY pour une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On écrit alors que : pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a :

$$AX = Y \iff AX = I_nY \iff \dots \iff I_nX = BY \iff X = BY.$$

La dernière matrice B ainsi obtenue (celle pour laquelle $X = BY$) n'est alors autre que

Moralité :
Pour obtenir la matrice A^{-1}, on fait des opérations sur les lignes de A jusqu'à obtenir la matrice I_n. En faisant les mêmes opérations à partir de la matrice I_n, on obtient la matrice A^{-1}.

Exercice 1
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}

Remarque 11

- Pour rappel : **une résolution sans opérations indiquées ne sera pas lue par le correcteur !**
- On fait en quelque sorte 2 pivots de Gauss : un de haut en bas pour obtenir la forme échelonnée, et un de bas en haut pour finir la résolution.
- Distinguez bien quand il est nécessaire d'aller jusqu'au bout de la résolution ou non :
  - si on demande de montrer que A est inversible (mais qu'on ne demande pas A^{-1}) :
  - si on demande de montrer que A est inversible et de calculer A^{-1} :

Exercice 2

Montrer que toutes les matrices ci-dessous sont inversibles et calculer leurs inverses :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$