

Fin du cours manuscrit sur les matrices

rge: Bien que la notation A^T soit celle recommandée par le programme de BCPST, on trouve parfois également la notation tA .

3.2. Opérations

Prop: Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors:

$$1) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2) (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$3) (A^T)^T = A$$

dém: ce sont des vérifications faciles laissées en exercice

Prop: Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors: $(AB)^T = B^T A^T$.

rge: Δ à l'ordre, $B^T A^T \neq A^T B^T$, le produit $A^T B^T$ est de toute façon impossible en raison des tailles des matrices A et B .

dém: Tout d'abord vérifions que les matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$ ont bien la même

taille: $\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{donc } AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \text{ donc } (AB)^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$

et $\left\{ \begin{array}{l} A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ B^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{donc } B^T A^T \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K}) \text{ également.}$

Vérifions ensuite qu'elles ont les mêmes coefficients: $\forall (i,j) \in [1,q] \times [1,n]$

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^p (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^p B_{k,i} A_{j,k} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^p A_{j,k} B_{k,i} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij}$$

Ainsi $B^T A^T = (AB)^T$. $\square$

rge: Δ en (*) on a utilisé que $B_{k,i} A_{j,k} = A_{j,k} B_{k,i}$ ce qui est correct car $B_{k,i}$ et $A_{j,k}$ sont des nombres (il n'est pas question ici de matrices qui commuteraient).

Cor 1: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $p \in \mathbb{N}$, alors $(A^p)^T = (A^T)^p$.

dém: Par récurrence sur p en utilisant $B = A^p$ dans la proposition précédente. $\square$

Cor 2: Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

dém: Grâce à la proposition précédente, on a :

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = I_n^T \quad \text{et} \quad A^T (A^{-1})^T = (A^{-1} A)^T = I_n^T$$

Or $I_n^T = I_n$. Ceci montre donc que $A^T \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

3.3. Matrices remarquables

Prop: 1) Si $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, alors $D^T = D$.

2) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) alors A^T est triangulaire inférieure (resp. supérieure).

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

def: Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

- symétrique lorsque $A^T = A$
- antisymétrique lorsque $A^T = -A$

notation: On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$

Rge: Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

- $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, A_{i,j} = A_{j,i}$
- $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow A^T = -A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, A_{i,j} = -A_{j,i}$

En particulier (en prenant $i=j$), les coefficients diagonaux d'une matrice

antisymétrique sont forcément nuls : si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,i} = -A_{i,i}$
dnc $A_{i,i} = 0$.

exo classique : Démontrer que toute matrice carrée s'écrit de manière unique
comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique,
c'est-à-dire que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists! (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : M = S + A$.

↳ On raisonne par analyse-synthèse :

analyse : Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

alors $M^T = (S + A)^T = S^T + A^T = S - A$ (car $S^T = S$ et $A^T = -A$).

dnc $M + M^T = S + A + S - A = 2S$ dnc $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$

et $M - M^T = S + A - (S - A) = 2A$ dnc $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$.

synthèse : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^T)$. Alors :

• $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$: en effet, $S^T = \frac{1}{2}(M + M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T + (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T + M) = S$

• $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$: en effet, $A^T = \frac{1}{2}(M - M^T)^T = \frac{1}{2}(M^T - (M^T)^T) = \frac{1}{2}(M^T - M) = -A$

• $M = S + A$: en effet, $S + A = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T) = M$.

Finalement on a bien démontré par analyse-synthèse que

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists! (S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : M = S + A$.

rgé : c'est la même preuve que : "toute fonction réelle s'écrit de manière unique
comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire".