Programme de colles : semaine 16, du 2/2 au 6/2

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Applications

- si $f : I \longrightarrow J$ est strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et bijective alors $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est strictement monotone, de même sens de variation que f
- Dérivée de f^{-1}, exemple de $\arctan'$
- Exemples d'études de suites définies implicitement par une relation du type $u_n = f^{-1}(n)$ ou $u_n = f_n^{-1}(0)$

2 Matrices

La notion de déterminant n'est au programme de BCPST que dans le cas de la dimension 2.

- on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- matrices lignes, colonnes, carrées, nulle, triangulaires, diagonales. On note $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale de coefficients $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
- matrice identité, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$
- opérations matricielles : somme, multiplication par un scalaire, produit, puissance
- produit et puissance de matrices diagonales
- pièges du produit matriciel : en général $AB \neq BA$, $(AB)^p \neq A^p B^p$ et $\big(AB = AC \text{ et } A \neq 0\big) \not\Longrightarrow B = C$
- formule du binôme de Newton : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors $\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- exemples de calculs de puissances de matrices par récurrence.
- matrices inversibles : on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n
  - propriétés de l'inverse : pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $A^{-1}, \lambda A, AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, inverse d'une matrice diagonale
  - exemple de calculs d'inverses en utilisant un polynôme annulateur *(aucun théorème général n'a été énoncé)*
  - inverse d'une matrice de taille 2 : pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on définit $\det(A) = ad - bc$; A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
- matrice transposée : on note A^T la transposée de A
  - opérations : pour A et B des matrices ad hoc et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a : $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(A^T)^T = A$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
  - matrices symétriques, antisymétriques
- matrices et systèmes linéaires :
  - écriture sous la forme $AX = Y$ d'un système linéaire
  - matrices échelonnées, on note $\operatorname{rg}(A)$ le rang de A. Exemples de calculs du rang d'une matrice en fonction d'un paramètre dans ses coefficients
  - pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a : $\operatorname{rg}(A) \leq \min(n,p)$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$.
- matrices inversibles :
  - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\operatorname{rg}(A) = n$ ssi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $AX = Y$ est de Cramer. Dans ce cas la solution de $AX = Y$ est $X = A^{-1}Y$
  - calcul pratique de l'inverse : par résolution du système $AX = Y$ pour Y quelconque, cela revient à faire des opérations sur les lignes des matrices A et I_n

3 Informatique en langage Python

Tableaux avec la bibliothèque `numpy` :

- création avec les commandes : `np.array`, `np.ones`, `np.eye`, `np.zeros`, `np.diag`
- opérations coefficients par coefficients. *Nous n'avons pas vu en cours le résultat de `A==B` si `A` et `B` sont des tableaux.*
- accès aux dimensions avec `np.size(A,0)` et `np.size(A,1)`
- accès ou modifications des coefficients : si `A` est un tableau à n lignes et p colonnes alors on accède à ses coefficients par la syntaxe `A[i,j]` pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$
- création d'une matrice à partir de la matrice nulle via deux boucles `for` imbriquées

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection entre deux intervalles I et J telle que f' ne s'annule pas. On admet que f^{-1} est dérivable sur J. Énoncer la formule donnant $(f^{-1})'$.
2. Montrer que $P(X) = X^3 - 3X + 1$ admet 3 racines réelles.
3. Donner la définition du produit matriciel.
4. Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ alors $(AB)C = A(BC)$.
5. Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices *(à l'attention des élèves : attention, citer les hypothèses adéquates est également un attendu de cette question).*
6. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^p pour tout $p \geq 2$ en utilisant le binôme de Newton.
7. Démontrer que si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
8. Énoncer le théorème donnant l'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examinateur.
9. Démontrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $(AB)^T = B^T A^T$.
10. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ choisie par l'examinateur est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot de Gauss.
11. Écrire une fonction Python `produitmat` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 8 et 9 (calcul de primitives, y compris celles de la forme $u'f(u)$), tous les exos :
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6801`
`https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6867`

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.