NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2 pts).
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B commutent-elles ?

On calcule que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc $AB = BA$ donc A et B commutent.

Question 2 (/1 pt). Quand dit-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure ?

Lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
$i < j \Rightarrow A_{i,j} = 0$

Question 3 (/1 pt). Quand dit-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique ?

Lorsque $A^T = A$

Question 4 (/2 pts). Énoncer une propriété donnant l'inverse d'un produit de deux matrices.

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$
Alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$
et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Question 5 (/4 pts).

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Donner A^{-1}.
3. Donner $(A^T)^{-1}$.
4. Donner $(A^2)^{-1}$.

1) $\det(A) = -2 - (-1) = -1 \neq 0$ donc A est inversible

2) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2 pts).
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B commutent-elles ?

On calcule que

$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $AB = BA$ donc A et B commutent

Question 2 (/1 pt). Quand dit-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure ?

Lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
$i > j \Rightarrow A_{i,j} = 0$

Question 3 (/1 pt). Quand dit-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique ?

Lorsque $A^T = -A$

Question 4 (/2 pts). Énoncer une propriété donnant la transposée d'un produit de deux matrices.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$
alors $(AB)^T = B^T A^T$

Question 5 (/4 pts).

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Donner A^{-1}.
3. Donner $(A^T)^{-1}$.
4. Donner $(A^2)^{-1}$.

1) $\det(A) = -2 - (-1) = -1 \neq 0$ donc A est inversible

2) $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

4) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$