Exercice 1

1. Dans une classe de 26 élèves, tous étudient le latin ou le grec. On sait que 12 étudient le grec et 20 le latin. Combien étudient les deux langues ?
2. Soient E, F, G trois ensembles finis. Le but de cette question est de démontrer la "formule du crible" :

$$\begin{aligned} Card(E \cup F \cup G) = Card(E) &+ Card(F) + Card(G) \\ &- Card(E \cap F) - Card(F \cap G) - Card(E \cap G) \\ &+ Card(E \cap F \cap G) \end{aligned}$$

   (a) Appliquer la formule du cours donnant $Card(A \cup B)$ avec $A = E \cup F$ et $B = G$.
   (b) Utiliser ensuite les règles de distributivité de $\cap$ et $\cup$ énoncées dans le chapitre sur les ensembles.
   (c) Conclure en appliquant à nouveau la formule du cours donnant le cardinal d'une union.
3. Dans une classe de 26 élèves, tous étudient au moins une langue parmi l'anglais, l'italien et l'espagnol. On sait que 22 étudient l'anglais, 16 l'espagnol, 10 l'italien ; que 8 étudient à la fois l'anglais et l'italien, 6 à la fois l'espagnol et l'italien et 10 à la fois l'anglais et l'espagnol. Combien d'élèves étudient les trois langues ?

Exercice 2

Une urne contient une boule noire et une boule blanche. On effectue n tirages d'une boule avec remise.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où la boule noire est sortie au moins une fois ?
3. Combien y a-t-il de tirages où la boule noire est sortie au moins deux fois ?

Exercice 3

Combien y a-t-il de brins d'ADN différents de 12 nucléotides de long formés par 3 adénines (A), 3 thymines (T), 3 cythosines (C) et 3 guanines (G) ?

Exercice 4

On s'intéresse aux anagrammes du mot ANANAS.

1. Combien y en a-t-il en tout ? (réponse : 60)
2. Combien y en a-t-il qui commencent par A ? (réponse : 30)
3. Combien y en a-t-il qui ne se terminent pas par N ? (réponse : 40)
4. Combien y en a-t-il qui contiennent à la suite les lettres S et A (dans cet ordre) ? (réponse : 30)
5. Combien y en a-t-il où les deux N ne se suivent pas ? (réponse : 40)

Exercice 5
Donner la partie du cours se rapportant à chacune des situations suivantes (p-liste, p-arrangement, permutation, p-combinaison, ensemble des parties) en précisant la valeur de p et les ensembles concernés, puis dénombrer l'ensemble demandé.

1. (a) Un codon est formé de 3 nucléotides parmi A, T, C et G. Combien existe-t-il de codons différents ?
   (b) On dispose de 4 jetons numérotés de 1 à 4 et d'un plateau comportant 16 cases. Si chaque case doit contenir au plus un jeton, combien y a-t-il de façons de placer les 4 jetons sur le plateau ?
   (c) Combien existe-t-il de listes Python de longueur 10 ne contenant que les éléments 1, 2 ou 3 ?
   (d) Dix hommes et dix femmes vont à un bal. Combien de façons y a-t-il de former 10 couples homme/femme pour la prochaine danse ?
   (e) Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire successivement et sans remise 10 jetons dans l'urne. Combien de tirages différents sont possibles ?
   (f) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot YOUPI ? Combien y en a-t-il pour le mot BIOCHIMIE ?
2. (a) On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien de mains différentes peut-on obtenir ?
   (b) Un cinéma projète 10 films en boucle dans 10 salles différentes. Il propose une soirée à la carte où les spectateurs choisissent 4 films à aller voir dans l'ordre de leur choix. Combien de soirées différentes sont possibles ?
   (c) On divise une classe de 36 élèves en deux groupes de 18 élèves. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
   (d) On divise une classe de 36 élèves en deux groupes de 18 élèves, le groupe a et le groupe b. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
   (e) Sur un plateau à 9 cases, on choisit de mettre ou non un pion sur chacune des cases. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
   (f) 36 élèves se placent dans une salle de 44 places. Combien de façons différentes ont-ils de s'asseoir ?

Exercice 6
On distribue une main constituée de 13 cartes issues d'un paquet classique de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains possibles contenant la dame de coeur ?
3. Combien y a-t-il de mains possibles contenant exactement un as ?
4. Combien y a-t-il de mains ne contenant aucun pique ?
5. Combien y a-t-il de mains contenant au moins un roi ?
6. Combien y a-t-il de mains contenant au plus un coeur ?

Exercice 7
Dans un jeu de loto à N numéros, une grille est constituée de k numéros (on ne peut pas jouer deux fois le même numéro).

1. Combien y a-t-il de grilles possibles en tout ?

Aujourd'hui les numéros gagnants sont $x_1, x_2, \ldots, x_k$. *Les valeurs* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *sont donc fixées dans toutes les questions qui suivent.*
Combien y a-t-il de grilles différentes avec...

2. ...aucun bon numéro ?
3. ...exactement 1 bon numéro ?
4. ...exactement 2 bons numéros ?
5. ...exactement p bons numéros ?
6. ...au moins 1 bon numéro ? Donner deux façons de dénombrer cette dernière situation, et en déduire une égalité faisant intervenir des coefficients binomiaux.

Exercice 8
Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles formant une partition de E. On note $n_1 = Card(E_1)$ et $n_2 = Card(E_2)$. Soit enfin $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Quelle relation existe-t-il entre n, n_1 et n_2 ?
2. Combien existe-t-il de sous-ensembles de E de cardinal k ?
3. Soit $i \in [\![0, k]\!]$. Combien existe-t-il de sous-ensembles de E de cardinal k contenant exactement i éléments de E_1 et $k - i$ éléments de E_2 ?
4. On note $\mathcal{P}_{i,k}$ l'ensemble des parties de E à k éléments dont exactement i sont dans E_1. On note aussi $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties de E à k éléments. Quelle relation y a-t-il entre $\mathcal{P}_k$ et les $\mathcal{P}_{i,k}$? En déduire une formule sur les coefficients binomiaux.