4 Preuves combinatoires des relations sur les coefficients binomiaux

Dans ce paragraphe on redémontre par des arguments de dénombrement les relations sur les coefficients binomiaux vues précédemment.

4.1 Symétrie

Proposition 1
Pour $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Preuve : Soit E un ensemble à n éléments. On peut dénombrer les sous-ensembles de E à k éléments de deux manières :

- Méthode 1 : on choisit les k éléments appartenant à l'ensemble, il y a possibilités.

- Métohde 2 : on choisit les $n-k$ éléments n'appartenant pas à l'ensemble, il y a possibilités.

Conclusion :

Remarque : c'est une méthode de "double décompte" : on compte de deux manières le nombre d'éléments d'un ensemble (ici l'ensemble des sous-ensembles de E à k éléments) et les deux résultats doivent être égaux.

4.2 Formule de Pascal

Proposition 2
Pour $1 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Preuve : Soit E un ensemble à n éléments, et soit $a \in E$. On peut dénombrer les sous-ensembles de E à k éléments en distinguant deux groupes :

- les sous-ensembles contenant a : il reste alors à choisir les $k-1$ éléments restant dans et on a donc possibilités.

- les sous-ensembles ne contenant pas a : il faut alors choisir tous les k éléments dans et on a donc possibilités.

Conclusion :

4.3 Formule d'absorption

Proposition 3
Pour $1 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

Preuve : Soit E un ensemble à n éléments, par exemple n personnes. Comptons le nombre de façons de former un groupe de k personnes contenant un chef.

- Méthode 1 : on choisit le groupe de k personnes (il y a possibilités) puis le chef parmi eux (il y a possibilités). Cela donne donc possibilités.
- Méthode 2 : on choisit d'abord qui sera le chef parmi les n personnes (il y a possibilités) puis on le laisse former son groupe de k personnes, c'est-à-dire choisir les $k-1$ autres personnes (il y a possibilités). Cela donne donc possibilités.

Conclusion :

4.4 Binôme de Newton

Proposition 4
Pour $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Preuve : Commençons par un exemple avec $n = 4$. Combien de fois obtient-on le terme a^2b^2 dans le produit suivant ?

$$(a+b)^4 \;=\; (a+b) \;\times\; (a+b) \;\times\; (a+b) \;\times\; (a+b)$$

De manière générale, le terme $a^k b^{n-k}$ apparaît fois dans le produit $(a+b)^n$ car