Programme de colles : semaine 17, du 9/2 au 13/2

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Matrices

La notion de déterminant n'est au programme de BCPST que dans le cas de la dimension 2.

- on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- matrices lignes, colonnes, carrées, nulle, triangulaires, diagonales. On note $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ la matrice diagonale de coefficients $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$
- matrice identité, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$
- opérations matricielles : somme, multiplication par un scalaire, produit, puissance
- produit et puissance de matrices diagonales
- pièges du produit matriciel : en général $AB \neq BA$, $(AB)^p \neq A^p B^p$ et $\left(AB = AC \text{ et } A \neq 0\right) \not\Longrightarrow B = C$
- formule du binôme de Newton : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors $\forall p \in \mathbb{N},\ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k A^{p-k}$
- exemples de calculs de puissances de matrices par récurrence.
- matrices inversibles : on note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n
  - propriétés de l'inverse : pour $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $A^{-1}, \lambda A, AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(A^{-1})^{-1} = A$, $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, inverse d'une matrice diagonale
  - exemple de calculs d'inverses en utilisant un polynôme annulateur *(aucun théorème général n'a été énoncé)*
  - inverse d'une matrice de taille 2 : pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on définit $\det(A) = ad - bc$; A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
- matrice transposée : on note A^T la transposée de A
  - opérations : pour A et B des matrices ad hoc et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a : $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(A^T)^T = A$, $(AB)^T = B^T A^T$, $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
  - matrices symétriques, antisymétriques
- matrices et systèmes linéaires :
  - écriture sous la forme $AX = Y$ d'un système linéaire
  - matrices échelonnées, on note $\operatorname{rg}(A)$ le rang de A. Exemples de calculs du rang d'une matrice en fonction d'un paramètre dans ses coefficients
  - pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a : $\operatorname{rg}(A) \leq \min(n,p)$, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$.
- matrices inversibles :
  - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi $\operatorname{rg}(A) = n$ ssi pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $AX = Y$ est de Cramer. Dans ce cas la solution de $AX = Y$ est $X = A^{-1}Y$
  - calcul pratique de l'inverse : par résolution du système $AX = Y$ pour Y quelconque, cela revient à faire des opérations sur les lignes des matrices A et I_n

2 Dénombrement

Dans tout ce qui suit, E et F sont des ensembles finis.

- on note $Card(E)$ le cardinal de E
- on a $Card(E) = N \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il existe une bijection $f : [\![1, N]\!] \longrightarrow E$
- E et F sont de même cardinal si et seulement s'il existe une bijection $f : E \longrightarrow F$
- cardinal d'une union : $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$. *Les élèves n'ont pas à connaître la formule du crible pour plus de deux ensembles, mais le cas de trois ensembles a été traité en exercice.*
- notion de partition d'un ensemble E
- si $(A_1, \ldots, A_p)$ est une partition de E alors $Card(E) = \sum_{i=1}^{p} Card(A_i)$
- cardinal du complémentaire : si $F \subset E$ alors $Card(E \backslash F) = Card(E) - Card(F)$
- cardinal d'un produit cartésien : $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$ et $Card(E^p) = Card(E)^p$
- nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments : n^p
- nombre de p-listes sans répétitions[1] d'un ensemble à n éléments : $\mathcal{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- nombre de permutations d'un ensemble à n éléments : $n!$. C'est aussi le nombre de bijections de E dans F si $Card(E) = Card(F) = n$
- nombre de p-combinaisons d'un ensemble à n éléments : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- nombre de parties d'un ensemble à n éléments : 2^n
- nombre d'anagrammes d'un mot donné
- savoir reconnaître dans une situation concrète s'il s'agit de p-listes, p-liste sans répétition, permutations, p-combinaisons, ensemble des parties
- interprétations combinatoires des formules sur les coefficients binomiaux : symétrie ($\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$), formule de Pascal ($\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$), formule "du chef" ou d'absorption ($\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$), binôme de Newton

3 Informatique en langage Python

Tableaux avec la bibliothèque `numpy` :

- création avec les commandes : `np.array`, `np.ones`, `np.eye`, `np.zeros`, `np.diag`
- opérations coefficients par coefficients. *Nous n'avons pas vu en cours le résultat de* `A==B` *si* `A` *et* `B` *sont des tableaux.*
- accès aux dimensions avec `np.size(A,0)` et `np.size(A,1)`
- accès ou modifications des coefficients : si `A` est un tableau à n lignes et p colonnes alors on accède à ses coefficients par la syntaxe `A[i,j]` pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$
- création d'une matrice à partir de la matrice nulle via deux boucles `for` imbriquées

1. on privilégie l'expression recommandée par le programme, mais le terme "p-arrangement" pourra aussi être employé

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer le théorème donnant l'inverse d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'appliquer sur un exemple choisi par l'examinateur.
2. Démontrer que pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a $(AB)^T = B^T A^T$.
3. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ choisie par l'examinateur est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot de Gauss.
4. Énoncer les formules donnant le cardinal d'une union de 2 ensembles finis et du complémentaire d'un ensemble fini.
5. Donner la définition d'une partition d'un ensemble. Quelle formule sur les cardinaux a-t-on dans ce cas ?
6. Si $Card(E) = n$ que vaut $Card(\mathcal{P}(E))$? Démontrer cette formule en paritionnant $\mathcal{P}(E)$ selon le nombre d'éléments des sous-ensembles de E.
7. Déterminer le nombre d'anagrammes d'un mot choisi par l'examinateur. *Les élèves ne doivent pas simplement appliquer une formule toute faite, mais expliquer la manière de compter.*
8. Énoncer la formule d'absorption pour les coefficients binomiaux et la démontrer par un argument combinatoire.
9. Écrire une fonction Python `produitmat` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.
10. Écrire une fonction Python `transpose` prenant en arguments une matrice et renvoyant sa transposée.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul “type remédiation” au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 8 et 9 (calcul de primitives, y compris celles de la forme $u'f(u)$), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6801`
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6867`
- On pourra aussi demander des calculs de dérivées.

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.