Feuille de cours 13.1 : vocabulaire probabiliste

1 Vocabulaire probabiliste

1.1 Expérience aléatoire

Définition 1 (Expérience aléatoire, univers)
Une **expérience aléatoire** $\mathcal{E}$ est une expérience qui, lorsqu'on la reconduit dans des conditions identiques, peut mener à plusieurs résultats différents, appelés **issues**, et dont on ne peut pas savoir à l'avance le résultat.
On note usuellement Ω l'ensemble de tous les résultats possibles ; Ω est appelé **univers** de l'expérience aléatoire.

Exercice 1
On lance deux dés classiques, un rouge et un bleu.

1. Quel univers considérer si on s'intéresse à la somme des deux résultats ?
2. Quel univers considérer si on s'intéresse aux valeurs des dés ?

Exercice 2
Une urne contient 1 boule blanche et 4 boules rouges. Quel univers considérer si :

1. on tire successivement deux boules avec remise ?
2. on tire successivement deux boules sans remise ?
3. on tire simultanément deux boules ?

Remarque : Dans tout ce chapitre (en fait, dans toute la première année de BCPST), les expériences aléatoires considérées se déroulent sur un univers Ω **fini**.

1.2 Évènements

Définition 2 (Évènement)
Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω.

1. On appelle **évènement** de $\mathcal{E}$ toute partie de Ω. Un évènement peut être vu comme une caractéristique du résultat de l'expérience dont on peut dire, après avoir observé l'expérience, si elle est réalisée ou non. L'ensemble des évènements de l'expérience aléatoire est $\mathcal{P}(\Omega)$ i.e.
2. Un évènement contenant un seul élément est appelé **évènement élémentaire**. Les évèvements élémentaires sont donc les singletons : si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ alors il y a n évènements élémentaires, ce sont les
3. Ω est appelé l'**évènement certain**.
4. $\emptyset$ est appelé l'**évènement impossible**.

Exercice 3
On s'intéresse au résultat du lancé d'un dé classique. Préciser l'univers Ω, les évènements élémentaires A_k, et la partie correspondant à l'évènement A : “le résultat obtenu est pair”.

Les manipulations sur les évènements sont *rigoureusement les mêmes* que celles sur les ensembles (cf chapitres sur les ensembles et sur le dénombrement, tous les théorèmes restent vrais !). Le contexte probabiliste invite à réinterpréter les opérations sur les ensembles en termes d'expériences aléatoires. On emploie alors le **vocabulaire probabiliste** suivant :

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$A \in \mathcal{P}(\Omega)$	partie A	évènement A
$\overline{A}$		évènement **contraire** de A
$A \cap B$		les évenements A **et** B sont réalisés simultanément
$A \cup B$	union de A et B	A est réalisé **ou** B est réalisé (ou les deux)
$A \subset B$		si l'évènement A est réalisé alors l'évènement B l'est aussi
$A \cap B = \emptyset$		les évènements A et B sont
$A = \Omega$	$A = \Omega$	l'évènement A est (il se réalise toujours)
$A = \emptyset$	$A = \emptyset$	l'évènement A est (il ne se réalise jamais)
$A = \{x_i\}$	A est un	A est un évènement

Remarque : dans ce chapitre, on s'efforcera d'employer le vocabulaire probabiliste et non le vocabulaire ensembliste.

Exemple : On lance un dé et on considère les évènements suivants :

- A : “le numéro sorti est pair”
- B : “le numéro sorti est supérieur à 2”
- C : “le numéro sorti est un multiple de 3”

Alors

- l'évenement contraire de B est
- Si est réalisé alors l'est aussi, i.e.
- $A \cup C =$
- $A \cap C =$

Exercice 4
Soient A, B et C trois évènements d'une expérience aléatoire quelconque. Écrire, à l'aide d'opérations sur les ensembles A, B et C, les évènements E : “au moins un des trois évènements s'est réalisé” et F : “aucun des trois événements ne s'est réalisé”.
Que dire de E et F ?

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance consécutivement une pièce n fois. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note
P_k : “on obtient Pile au k-ième lancer”.
Exprimer les évènements suivants uniquement à l'aide des P_k :

1. F_k : “on obtient Face au k-ième lancer”
2. A_n : “on n'obtient que des Piles”
3. B_n : “on obtient au moins une fois Pile au cours des n lancers”
4. E_n : “le premier Pile apparaît au n-ième lancer”
5. F_n : “le premier et le n-ième lancer ont donné le même résultat”

1.3 Système complet d'évènements

Définition 3 (Système complet d'évènements)
Dans une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ d'univers Ω, une famille d'évènements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est appelée **système complet d'évènements** lorsque :

1. les A_k sont deux à deux incompatibles, i.e. $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
2. leur réunion est égale à Ω, i.e. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Remarque : On ajoute parfois à cette définition : 3. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_i \neq \emptyset$.
On retrouve alors que $(A_1, \dots A_n)$ est un système complet d'évenements si et seulement si c'est une

Exemples :

1. On lance un dé et on considère $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On a alors $A = \{2, 4, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$ forment un système complet d'évènements.
2. Pour tout évènement A, le couple $(A, \overline{A})$ est un système complet d'évènements.
3. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, l'ensemble des évènements élémentaires, c'est-à-dire
forme naturellement un système complet d'évènements. En effet,

Remarque : Les systèmes complets d'évènements servent à faire des études exhaustives, i.e. à traiter tous les cas sans redites. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'évnèmenents alors on peut dire que : A_1 est réalisé **ou bien** A_2 est réalisé **ou bien** $\dots$ **ou bien** A_n est réalisé.

Exercice 6
On tire successivement deux boules sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches, 2 boules vertes et 1 boule noire. Donner un système complet d'évènements qui sera utile pour déterminer la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche.