NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2 pts). Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Question 2 (/2 pts). Quand dit-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique ?

Lorsque $A^T = -A$

Question 3 (/2 pts). Énoncer une propriété donnant l'inverse d'un produit de deux matrices.

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in GL_n(\mathbb{K})$ et

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Question 4 (/4 pts).

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?

2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

1) $\det(A) = -1 - 2 = -3 \neq 0$ donc A est inversible

2) $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$

$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$= 2 < 3$

Or $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc B n'est pas inversible

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2 pts). Énoncer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

Question 2 (/2 pts). Quand dit-on qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique ?

Lorsque $A^T = A$

Question 3 (/2 pts). Énoncer une propriété donnant la transposée d'un produit de deux matrices.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ alors $(AB)^T = B^T A^T$.

Question 4 (/4 pts).

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible?
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

1) $\det(A) = 2 - (-1) = 3 \neq 0$ donc A est inversible

2) $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$

$= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2)$

$= 2 < 3$

Or $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Donc B n'est pas inversible