1 Rappels de cours

Proposition :
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$

Remarque : il est inutile de mettre dans le crochet la forme générale d'une primitive c'est-à-dire $\Big[\qquad\qquad \Big]$ car

Exemples :

- $\displaystyle\int_1^2 t^3\, dt =$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx =$
- $\displaystyle\int_0^1 u\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du =$
- $\displaystyle\int_{-x}^x e^{-t}\, dt =$

Remarque : attention, il est autorisé de mettre une variable comme borne de l'intégrale, mais elle ne peut pas être égale à la variable d'intégration (x s'il y a dx, t s'il y a dt, etc). Par exemple, l'expression $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ a un sens, mais l'expression $\displaystyle\int_0^x f(x)\, dx$ n'en a pas.

Proposition : (linéarité de l'intégrale)
Si f et g sont continues sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \lambda \int_a^b g(t)\, dt.$$

Ainsi, si $F' = f$ et $G' = g$ sur $[a, b]$ alors on peut écrire au choix :

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t)\, dt = \begin{cases} \Big[F(t) + \lambda G(t)\Big]_a^b = \\ \text{ou} \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt + \lambda \int_a^b g(t)\, dt = \Big[F(t)\Big]_a^b + \lambda \Big[G(t)\Big]_a^b = \end{cases}$$

Exemples :

- $\displaystyle\int_1^4 3 + 2x\, dx =$
- $\displaystyle\int_0^1 x^3 - x^2\, dx =$

2 Test de positionnement

Calculer les intégrales suivantes :	**Note**
1) $\int_0^2 x\,dx =$	
2) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx =$	
3) $\int_0^x e^{2t}\,dt =$	
4) $\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos(t^2)\,dt =$	
5) $\int_1^2 \frac{t}{t^2+1}\,dt =$	
6) $\int_{-1}^1 x(1+x^2)^3\,dx =$	
7) $\int_1^2 x^2y\,dx =$	
8) $\int_1^2 (x^2+y)\,dy =$	
Total	

3 Exercices

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 t^2 - 3\,dt$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{2t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^1 \sin(2\pi x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^2 e^{-t/2}\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{2t^2+1}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\,dt$

Exercice 2 (mais qui est la variable ?)
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 t^2x\,dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 t^2x\,dx$
3. $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,dt$
4. $\displaystyle\int_{-T}^T e^{-t/T}\,dt$
5. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(\omega t+\varphi)\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^\pi \sin(\omega x+\varphi)\,d\varphi$

Exercice 3
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^3}\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 t^n\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(x)\sin(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\,dt$
6. $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{-2s+1}\,ds$
7. $\displaystyle\int_0^\lambda \frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t^2}\,dt$
8. $\displaystyle\int_{-x}^x \frac{t^3}{1+t^4}\,dt$
9. $\displaystyle\int_{-\theta}^\theta \sin(t)\,dt$
10. $\displaystyle\int_{-\theta}^0 \cos(t)\,dt - \int_0^\theta \cos(t)\,dt$
11. $\displaystyle\int_1^y \ln(t)\,dt$
12. $\displaystyle\int_1^y 2t\ln(t)\,dt$ (on remarquera que $2\ln(t) = ...$)