Programme de colles : semaine 18, du 16/2 au 20/2

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Dénombrement

Reprise du programme précédent.

2 Probabilités finies

***Attention :* les points suivants n'ont pas encore été vus en classe : utilisation de la formule de Bayes en combinaison avec la FPT, indépendance.**

Les élèves peuvent dessiner des arbres de probabilités au brouillon, mais ceux-ci ne constituent pas une preuve.

- vocabulaire probabiliste : expérience aléatoire, univers, évènement, évènement élémentaire, contraire, impossible, certain, incompatibles
- interprétation de l'union, l'intersection, et le complémentaire d'évènements
- notion de système complet d'évènements
- probabilité sur un univers fini, formules $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ si les A_i sont deux à deux incompatibles. Enfin, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
- Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$ alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $pi \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- situations d'équiprobabilité, lien avec le dénombrement
- probabilités conditionnelles : on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité de A sachant B, formule et interprétation
- pour B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B : A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En particulier, $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(\overline{A})$, $\mathbb{P}_B(A \cup A') = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A') - \mathbb{P}_B(A \cap A')$, etc.
- formule des probabilités composées
- formule des probabilités totales. *On donne ce nom indifféremment aux deux formules $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$ valables si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'évènements.*
- formule de Bayes.

3 Informatique en langage Python

Tableaux avec la bibliothèque `numpy` :

- création avec les commandes : `np.array`, `np.ones`, `np.eye`, `np.zeros`, `np.diag`
- opérations coefficients par coefficients. *Nous n'avons pas vu en cours le résultat de `A==B` si `A` et `B` sont des tableaux.*
- accès aux dimensions avec `np.size(A,0)` et `np.size(A,1)`
- accès ou modifications des coefficients : si `A` est un tableau à n lignes et p colonnes alors on accède à ses coefficients par la syntaxe `A[i,j]` pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, p-1]\!]$
- création d'une matrice à partir de la matrice nulle via deux boucles `for` imbriquées

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer les formules donnant le cardinal d'une union de 2 ensembles finis et du complémentaire d'un ensemble fini.
2. Donner la définition d'une partition (respectivement d'un système complet d'évènements) d'un ensemble (respectivement d'un espace probabilisé). Quelle formule sur les cardinaux (respectivement sur les probabilités) a-t-on dans ce cas ?
3. Si $Card(E) = n$ que vaut $Card(\mathcal{P}(E))$? Démontrer cette formule en paritionnant $\mathcal{P}(E)$ selon le nombre d'éléments des sous-ensembles de E.
4. Énoncer la formule d'absorption pour les coefficients binomiaux et la démontrer par un argument combinatoire.
5. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
6. Donner et démontrer la formule donnant $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
7. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}_B$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
8. Énoncer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
9. Écrire une fonction Python `produitmat` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.
10. Écrire une fonction Python `transpose` prenant en arguments une matrice et renvoyant sa transposée.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 8 et 9 (calcul de primitives, y compris celles de la forme $u'f(u)$), tous les exos :
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6801`
  `https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6867`
- On pourra aussi demander des calculs de dérivées.

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.