Feuille de cours 13.2 : indépendance

4 Évènements indépendants

4.1 Indépendance de deux évènements

Définition 1 (évènements indépendants)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Proposition 2 (Lien avec les probabilités conditionnelles)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors
$$(A \text{ et } B \text{ sont indépendants}) \iff \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

Remarque : Dire que deux évènements sont indépendants signifie donc que la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

En pratique le plus souvent, l'indépendance de deux évènements est une *hypothèse de modélisation.* Lorsque l'énoncé ne la précise pas c'est à vous de repérer si deux évènements A et B sont indépendants en vous posant la question : "savoir que B est réalisé modifie-t-il la probabilité que A le soit aussi ?".

Exemple : Les évènements A et B sont-ils indépendants dans les situations suivantes ?

1. On lance deux dés. A : "le résultat du premier dé est 1", B : "le résultat du deuxième dé est 5".
2. On tire successivement et *sans remise* 2 boules dans une urne contenant 3 boules blanches et 2 boules noires. A : "la première boule est blanche", B : "la deuxième boule est blanche".
3. Même expérience et évènements qu'au-dessus, mais pour un tirage successif *avec remise.*

Exercice 1
On prend une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Les évènements A : "tirer un roi" et B : "tirer un pique" sont-ils indépendants ?

Exercice 2
On lance une pièce équilibrée 2 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois "pile" ?

Remarque : Attention à ne pas confondre **indépendants** (i.e.) et **incompatibles** (i.e.) ! D'ailleurs, si A et B sont deux évènements incompatibles tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B ne sont pas indépendants puisque :

Proposition 3
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Si A et B deux évènements indépendants, alors :

i) A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
ii) $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
iii) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

4.2 Indépendance de n évènements

Définition 4 (deux à deux indépendants, mutuellement indépendants)
Soient $A_1, \ldots, A_n$ n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits :

1. **deux à deux indépendants** lorsque

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i \neq j,\ A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants, i.e. } \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

2. **mutuellement indépendants** lorsque pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
et pour tout sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\,\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Exercice 3
On lance n fois un dé classique. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 6 ?

Exercice 4
On lance un dé rouge et un dé bleu, et on considère les évènements suivants :
A : "le dé rouge affiche un numéro pair", B : "le dé bleu affiche un numéro pair"
et C : "la somme des deux numéros obtenus est paire".
Les évènements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ? mutuellement indépendants ?

Remarque : Si les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Mais la réciproque est fausse.

Proposition 5
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit B_i l'un des évènements A_i ou sous contraire : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.
Alors les évènements $B_1, \ldots, B_n$ sont mutuellement indépendants.

Exemple : Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont mutuellement indépendants, alors A_1, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, A_4 sont mutuellement indépendants.

4.3 Remarques finales

Finissons par deux remarques concernant l'utilisation de l'indépendance d'évènements.

Tout d'abord, si les évènements A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants, la formule des probabilités composées reste vraie, mais se simplifie, c'est-à-dire que :

Moralité : mieux vaut appliquer directement la définition de l'indépendance plutôt qu'une formule des probabilités composées et la simplifier.

Enfin, certains exercices peuvent se traiter de plusieurs manières, par exemple par du dénombrement ou par de l'indépendance.

Exercice 5
On lance n fois un dé classique. Quelle est la probabilité de l'évènement A : "on obtient que des 6" ? On proposera deux méthodes.