
Mathématiques - mercredi 18 février 2026
Devoir n°6 Durée : 2 h

- Aucun document autorisé. Calculatrice interdite.
- Ce sujet comporte 2 pages et est constitué de 3 exercices indépendants.
- L'exercice 1 (informatique) doit être rendu sur une copie séparée.
- Pensez à vous relire et à encadrer les résultats à la fin de chaque exercice.

Exercice 1.

Dans tout cet exercice, on considère uniquement des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Écrire un code Python permettant de définir la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant `True` si cette matrice est diagonale et `False` sinon.
3. Donner sans justifier une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit inversible. Donner alors la matrice D^{-1} .
4. En utilisant les questions précédentes, écrire une fonction Python `inverse_diag` prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant son inverse si A est à la fois diagonale et inversible, et renvoyant un message d'erreur sinon.

Exercice 2.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant initialement 4 boules chacune. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires. L'urne U_2 contient 3 boules blanches et 1 boule noire.

On tire une boule dans l'urne U_1 . Si elle est blanche, on la remet dans l'urne U_1 , et si elle est noire on la remet dans l'urne U_2 .

Une fois ce premier tirage effectué, on tire ensuite une boule dans l'urne U_2 . Si elle est noire on la remet dans l'urne U_2 , et si elle est blanche on la remet dans l'urne U_1 .

1. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit noire ?
2. La deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité qu'on ait tiré une boule noire au premier tirage ?
3. Quelle est la probabilité qu'à la fin de l'expérience les urnes U_1 et U_2 contiennent encore 4 boules chacune ?

Exercice 3.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Déterminer la dérivée de f .
- (b) Montrer que $F : x \mapsto -(x^2 + 3x + 4)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux dérivées successives de f . Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ème de f définie par :

$$f^{(0)} = f \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

on a ainsi, $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$ (la dérivée de la dérivée); $f^{(3)} = f'''$; etc.

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}.$$

On précisera l'expression de a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .

- (b) Vérifier si on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$. Préciser également la valeur de X_0 .

- (c) En déduire l'expression de X_n en fonction de A^n et de X_0 (*une preuve est attendue*).

$$3. \text{ On note } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer N^2 et N^3 , puis exprimer A en fonction de N et de I_3 .

- (b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n, I_3, N et N^2 pour tout $n \geq 2$.

4. Conclure en déterminant l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixés, on note $g : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

- (a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .

- (b) En déduire l'expression d'une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

- (c) Pour $n \geq 2$, déterminer une "primitive n -ème de g " c'est-à-dire une fonction G_n telle que $G_n^{(n)} = g$.