DS 6 - Corrigé

Exercice 1

1)
```
import numpy as np
A = np.array([[2,5],[4,1]])
```

2)
```
def est_diago(A):
    return A[0,1]==0 and A[1,0]==0
```

3) La matrice $D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Dans ce cas $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

4)
```
def inverse_diag(A):
    if est_diago(A):
        if A[0,0] != 0 and A[1,1] != 0:
            return np.array([[1/A[0,0], 0], [0, 1/A[1,1]]])
        else :
            return "A est diagonale mais pas inversible"
    else :
        return "A n'est pas diagonale"
```

Exercice 2

Notons pour $i \in \{1,2\}$, $\boxed{B_i : \text{"la boule tirée dans l'urne } U_i \text{ est blanche"}}$.

1) Dans le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$ la formule des probabilités totales donne : $\boxed{\mathbb{P}(\overline{B_2}) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})}$.

Or $\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}$

et $\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) = \frac{1}{4}$ (car si B_1 est réalisé, l'urne U_2 contient 3 boules blanches et 1 boule noire au moment du 2^e tirage)

et $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{2}{5}$ (car si $\overline{B_1}$ est réalisé, l'urne U_2 contient 3 boules blanches et 2 boules noires au moment du 2^e tirage)

Ainsi $\mathbb{P}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{13}{40}}$.

2) D'après la formule de Bayes, $\boxed{\mathbb{P}_{B_2}(\overline{B_1}) = \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) \times \frac{\mathbb{P}(\overline{B_1})}{\mathbb{P}(B_2)}}$ puis

$\mathbb{P}(B_2) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B_2})$ et $\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})$ donc d'après les calculs de la 1ère question :

$$\mathbb{P}_{B_2}(\overline{B_1}) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{1/2}{1 - \frac{13}{40}} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{40}{27} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

3) Notons A : "les urnes U_1 et U_2 contiennent 4 boules chacune à la fin de l'expérience".

Il n'y a que 2 possibilités pour que A se réalise : soit on a tiré une boule blanche puis une boule noire, soit l'inverse. Ainsi $\boxed{A = (B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)}$.

Comme $B_1 \cap \overline{B_2}$ et $\overline{B_1} \cap B_2$ sont incompatibles (car $B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1} \cap B_2 = \emptyset$)

on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2)$.

Puis par la formule des probabilités composées :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B_2}) + \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$$

$$= \boxed{\frac{17}{40}}.$$

Exercice 3

1) a) On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)\times(-e^{-x})$$
$$= \boxed{(-x^2+x)e^{-x}}$$

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -(2x+3)e^{-x} + (-(x^2+3x+4)\times(-e^{-x}))$$
$$= (-2x-3+x^2+3x+4)e^{-x}$$
$$= (x^2+x+1)e^{-x}$$
$$= f(x)$$

donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) a) Tout d'abord pour $n=0$,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = (x^2+x+1)e^{-x} = (a_0x^2+b_0x+c_0)e^{-x}$

avec $\boxed{a_0 = b_0 = c_0 = 1.}$

Supposons ensuite que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (a_nx^2+b_nx+c_n)e^{-x}$ avec $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (2a_nx+b_n)e^{-x} + (a_nx^2+b_nx+c_n)\times(-e^{-x})$$
$$= (-a_nx^2 + (2a_n-b_n)x + (b_n-c_n))e^{-x}$$
$$= (a_{n+1}x^2 + b_{n+1}x + c_{n+1})e^{-x}$$

avec $\boxed{a_{n+1} = -a_n,\ b_{n+1} = 2a_n - b_n \text{ et } c_{n+1} = b_n - c_n.}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on calcule que

$$AX_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_n \\ 2a_n - b_n \\ b_n - c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \quad \text{et} \quad \boxed{X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

c) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\boxed{X_n = A^n X_0.}$

Tout d'abord pour $n=0$, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.

Supposons ensuite que $X_n = A^n X_0$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$, alors

$X_{n+1} = A X_n = A(A^n X_0) = A^{n+1} X_0$ ce qu'il fallait démontrer.

3) a) On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\2&0&0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\2&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix} = 0_3$.

Et $A = \begin{pmatrix} -1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix} = -I_3 + N$

b) Comme $-I_3$ et N commutent, on a, d'après le binôme de Newton :

$$A^n = (-I_3+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (-I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k$$

Or, comme $N^3 = 0_3$, pour tout $k \geq 3$ on a $N^k = 0_3$, donc :

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k = \binom{n}{0}(-1)^n N^0 + \binom{n}{1}(-1)^{n-1} N + \binom{n}{2}(-1)^{n-2} N^2$$

$$\boxed{= (-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} N^2}$$

4) Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n\\b_n\\c_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = \left((-1)^n I_3 + n(-1)^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-1} N^2\right)\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$$= \left((-1)^n \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + n(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 0&0&0\\2&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\2&0&0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0\\ 2n(-1)^{n-1} & (-1)^n & 0\\ n(n-1)(-1)^{n-2} & n(-1)^{n-1} & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n\\ 2n(-1)^{n-1} + (-1)^n\\ n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1\\ 1-2n\\ 1-n+n(n-1) \end{pmatrix} = \boxed{(-1)^n \begin{pmatrix} 1\\ 1-2n\\ (1-n)^2 \end{pmatrix}}$$

et donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c)e^{-x} = \boxed{(-1)^n\left(x^2 + (1-2n)x + (1-n^2)\right)e^{-x}}$$

5) a) Tout d'abord, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$ car A^T est échelonnée et contient 3 pivots non nuls. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cela montre que $\boxed{A \in GL_3(\mathbb{R})}$.

Puis, pour $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on résout :

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1)$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

$$\iff I_3 X = X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} Y \quad (L_i \leftarrow -L_i \text{ pour tout } i \in [\![1,3]\!])$$

et donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

b) Cherchons une primitive G de g sous la forme

$G : x \mapsto (a'x^2 + b'x + c)e^{-x}$

Comme, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = (2a'x + b')e^{-x} + (a'x^2 + b'x + c')(-e^{-x})$

$$= (-a'x^2 + (2a' - b')x + (b' - c'))e^{-x}$$

on voit que $G' = g$ dès lors que

$$\begin{pmatrix} -a' \\ 2a' - b' \\ b' - c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{, c'est-à-dire que } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ou encore $A\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ou encore, puisque A est inversible,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -2a-b \\ -2a-b-c \end{pmatrix}$$

Ainsi $\boxed{G : x \longmapsto -\left(ax^2 + (2a+b)x + (2a+b+c)\right)e^{-x}}$

est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

c) Similairement, G_n sera donnée par :

$$G_n : x \longmapsto (a'_n x^2 + b'_n + c'_n)e^{-x} \qquad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \end{pmatrix} = (A^{-1})^n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Or $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1} = \left[(-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2n & 1 & 0 \\ n(n-1) & -n & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2n & 1 & 0 \\ n(n-1) & -n & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Résolvons pour $X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2n & 1 & 0 \\ n(n-1) & -n & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ -n(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \qquad \begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2nL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - n(n-1)L_1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n^2+n & n & 1 \end{pmatrix} Y \qquad (L_3 \leftarrow L_3 + nL_2)$$

Donc $(A^{-1})^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ n^2+n & n & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} a'_n \\ b'_n \\ c'_n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} a \\ 2na+b \\ (n^2+n)a+nb+c \end{pmatrix}$

Finalement, $\boxed{G_n : x \longmapsto (-1)^n\left(ax^2 + (2na+b)x + (n^2+n)a + nb + c\right)e^{-x}}$

vérifie $G_n^{(n)} = g$.