

Mathématiques - Devoir maison n°3
À rendre le lundi 9 mars 2026

Vous pouvez rendre une copie pour plusieurs élèves (maximum 3 élèves par groupe).

Exercice 1 (la guêpe qui veut se faire aussi grosse que l'éléphant).

Une guêpe est entrée par la fenêtre d'une chambre donnant sur un bureau. La fenêtre du bureau étant fermée, son seul moyen de ressortir est de repasser par la fenêtre de la chambre. À l'instant initial $n = 0$, la guêpe est dans la chambre ; puis son comportement suit les règles suivantes pour tout instant $n \in \mathbb{N}$:

- si elle est dans la chambre à l'instant n , alors à l'instant $n + 1$: elle reste dans la chambre avec une probabilité $1/2$, elle passe dans le bureau avec une probabilité $1/4$, et elle ressort par la fenêtre avec une probabilité $1/4$,
- si elle est dans le bureau à l'instant n , alors à l'instant $n + 1$: elle reste dans le bureau avec une probabilité $1/3$, et elle retourne dans la chambre avec une probabilité $2/3$,
- enfin, si elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note les événements :

- C_n : “la guêpe est dans la chambre à l'instant n ”,
- B_n : “la guêpe est dans le bureau à l'instant n ”, et
- D_n : “la guêpe est dehors à l'instant n ”.

On note enfin $c_n = \mathbb{P}(C_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.

1. D'après l'énoncé, quelles sont les valeurs de c_0 , b_0 et d_0 ? les valeurs de c_1 , b_1 et d_1 ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer c_{n+1} , b_{n+1} et d_{n+1} en fonction de c_n , b_n et d_n .
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 2b_n$.
4. En déduire l'expression de c_n et b_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = 1 - \frac{9}{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
6. Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$? Interpréter.

Exercice 2 (d'après “j'ai 2022 œufs”).

On définit les ensembles des matrices symétriques, antisymétriques, orthogonales et normales de taille 2 par, respectivement :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M^T = M\}, \\ \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M^T = -M\}, \\ \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) &= \{M \in GL_2(\mathbb{R}) : M^T = M^{-1}\} \text{ et} \\ \mathcal{N}_2(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M^T M = M M^T\}.\end{aligned}$$

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (a) Démontrer que $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \iff b = c$.
- (b) Démontrer que $M \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \iff (a = d = 0 \text{ et } b = -c)$.
- (c) Démontrer que $M \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R}) \iff (b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d))$.

2. Soit encore $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(a) Démontrer que $\det(M^T) = \det(M)$.

(b) Démontrer que si $M \in GL_2(\mathbb{R})$ alors $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$.

(c) En déduire que si $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ alors $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

(d) En remarquant que $a^2 + b^2 = 1$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$, démontrer alors que

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\varepsilon \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}.$$

3. (a) Démontrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$.

(b) En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, démontrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \neq \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$.