

Programme de colles : semaine 19, du 9/3 au 13/3

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Dénombrement

On pourra proposer des exercices de dénombrement dans le cadre des probabilités.

2 Probabilités finies

Les élèves peuvent dessiner des arbres de probabilités au brouillon, mais ceux-ci ne constituent pas une preuve.

- vocabulaire probabiliste : expérience aléatoire, univers, évènement, évènement élémentaire, contraire, impossible, certain, incompatibles
- interprétation de l'union, l'intersection, et le complémentaire d'évènements
- notion de système complet d'évènements
- probabilité sur un univers fini, formules $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ si les A_i sont deux à deux incompatibles. Enfin, si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
- Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ alors il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- situations d'équiprobabilité, lien avec le dénombrement
- probabilités conditionnelles : on note $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité de A sachant B , formule et interprétation
- pour B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, l'application $\mathbb{P}_B : A \mapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. En particulier, $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$, $\mathbb{P}_B(A \cup A') = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A') - \mathbb{P}_B(A \cap A')$, etc.
- formule des probabilités composées
- formule des probabilités totales. *On donne ce nom indifféremment aux deux formules $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$ valables si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'évènements.*
- formule de Bayes. *Exemples d'utilisation de la formule de Bayes combinée avec la formule des probabilités totales*
- indépendance de deux évènements : définition et interprétation. Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$
- si A et B sont indépendants alors il en est de même de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B , et de $\overline{A}$ et $\overline{B}$
- indépendance de n évènements : évènements deux à deux indépendants, mutuellement indépendants. La mutuelle indépendance implique l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fausse. *Un exemple d'évènements deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants a été donné.*
- si les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont indépendants alors les évènements $(B_1, \dots, B_n)$ le sont aussi où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ ou $B_i = \overline{A_i}$.

3 Informatique en langage Python

- Tableaux avec la bibliothèque `numpy` :
 - création avec les commandes : `np.array`, `np.ones`, `np.eye`, `np.zeros`, `np.diag`
 - opérations coefficients par coefficients. *Nous n'avons pas vu en cours le résultat de $A=B$ si A et B sont des tableaux.*
 - accès aux dimensions avec `np.size(A,0)` et `np.size(A,1)`
 - accès ou modifications des coefficients : si A est un tableau à n lignes et p colonnes alors on accède à ses coefficients par la syntaxe `A[i,j]` pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$
 - création d'une matrice à partir de la matrice nulle via deux boucles `for` imbriquées
- Tri d'une liste de nombres : tri par sélection, tri par insertion. *Seules les versions "en place" ont été présentées en classe. Bien que ce ne soit pas à proprement parler une question de cours, les élèves doivent connaître l'implémentation de ces tris en Python.*

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition d'une partition (respectivement d'un système complet d'évènements) d'un ensemble (respectivement d'un espace probabilisé). Quelle formule sur les cardinaux (respectivement sur les probabilités) a-t-on dans ce cas ?
2. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
3. Donner et démontrer la formule donnant $\mathbb{P}(\overline{A})$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$.
4. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}_B$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
5. Énoncer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
6. Donner la définition de " A et B sont deux évènements indépendants", puis démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B (ou, au choix de l'examineur, A et $\overline{B}$) le sont aussi.
7. Quand dit-on que des évènements sont mutuellement indépendants ? Deux à deux indépendants ?
8. Écrire une fonction Python `produitmat` prenant en arguments deux matrices A et B et renvoyant leur produit matriciel. Votre fonction devra gérer le cas où les tailles des matrices A et B ne sont pas compatibles.
9. Écrire une fonction Python `transpose` prenant en arguments une matrice et renvoyant sa transposée.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 10 (calculs d'intégrales par primitivation directe (ni IPP, ni changement de variables)), tous les exos :
<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=6952&v=ed78c>

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.