

Mathématiques - Devoir maison n°3
Corrigé

Exercice 1 (la guêpe qui veut se faire aussi grosse que l'éléphant).

Cet exercice est similaire à celui du TD 13 sur le groupe d'éléphants, on parle de "chaîne de Markov".

1. Comme la guêpe est initialement dans la chambre on a $c_0 = 1$ et $b_0 = d_0 = 0$. Et par suite $c_1 = 1/2$, $b_1 = 1/4$ et $d_1 = 1/4$.
2. Dans le système complet d'évènements (C_n, B_n, D_n) , la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{D_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{2} \times c_n + \frac{2}{3} \times b_n + 0 \times d_n \\ b_{n+1} &= \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{4} \times c_n + \frac{1}{3} \times b_n + 0 \times d_n \\ d_{n+1} &= \mathbb{P}(D_{n+1}) = \mathbb{P}_{C_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{B_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{D_n}(D_{n+1})\mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{4} \times c_n + 0 \times b_n + 1 \times d_n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{cases} c_{n+1} &= \frac{1}{2}c_n + \frac{2}{3}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4}c_n + \frac{1}{3}b_n \\ d_{n+1} &= \frac{1}{4}c_n + d_n \end{cases}$$

3. On peut procéder par récurrence ou bien remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire d'après la question précédente (puisque $n-1 \in \mathbb{N}$) :

$$2b_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}c_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1} \right) = \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} = c_n.$$

4. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a d'après les questions 3 et 4 :

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{2}{3}b_n = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{3}c_n = \frac{5}{6}c_n.$$

Donc $(c_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $c_1 = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = c_1 \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \frac{6}{5} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n$$

et donc

$$b_n = \frac{1}{2}c_n = \frac{3}{10} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

Attention comme la suite (c_n) est géométrique seulement à partir du rang $n = 1$, il faut appliquer la formule $c_n = c_p \times (\text{raison})^{n-p}$ avec $p = 1$ (et non pas $c_n = c_0 \times (\text{raison})^n$ qu'on obtiendrait avec $p = 0$).

5. Comme (C_n, B_n, D_n) est un système complet d'évènements, on a $c_n + b_n + d_n = 1$ donc

$$d_n = 1 - c_n - b_n = 1 - \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n - \frac{3}{10} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n = 1 - \frac{9}{10} \times \left(\frac{5}{6} \right)^n.$$

6. Comme $-1 < \frac{5}{6} < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 1$. Ainsi, il est *presque sûr* que la guêpe retrouve la sortie au bout d'un moment.

Le vocabulaire “presque sûr”, à première vue peu mathématique, est en fait le vocabulaire correct pour désigner un évènement dont la probabilité est 1. Ici il s'agit de l'évènement $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$: “la guêpe sort au bout d'un moment”. Notons que cela ne signifie pas que la guêpe ne puisse pas rester indéfiniment à l'intérieur, mais seulement que la probabilité que cela se produise est nulle...

Exercice 2 (d'après “j'ai 2022 œufs”).

Cet exercice est adapté d'un exercice du sujet donné à G2E en 2022.

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) &\iff M^T = M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = a \\ c = b \\ b = c \\ d = d \end{cases} \\ &\iff b = c. \end{aligned}$$

- (b) On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) &\iff M^T = -M \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \\ &\iff (a = d = 0 \text{ et } b = -c). \end{aligned}$$

- (c) On a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R}) &\iff M^T M = M M^T \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ca + db & c^2 + d^2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = ac + bd \\ ab + cd = ac + bd \\ b^2 + d^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c^2 = b^2 \\ a(b - c) + d(c - b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = c \text{ ou } b = -c \\ (a - d)(b - c) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = c \text{ ou } b = -c \\ b = c \text{ ou } a = d \end{cases} \\ &\iff (b = c \text{ ou } (b = -c \text{ et } a = d)). \end{aligned}$$

2. (a) Comme $M^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $\det(M^T) = ad - cb = ad - bc = \det(M)$.

(b) Notons $x = \det(M) = ad - bc$.

D'après le cours, si $M \in GL_2(\mathbb{R})$ alors $x \neq 0$ et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{x} & -\frac{b}{x} \\ -\frac{c}{x} & \frac{a}{x} \end{pmatrix}$.

Ainsi $\det(M^{-1}) = \frac{d}{x} \times \frac{a}{x} - \frac{b}{x} \times \frac{c}{x} = \frac{ad - bc}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\det(M)}$.

(c) Supposons que $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, alors $M \in GL_2(\mathbb{R})$ et $M^T = M^{-1}$, donc $\det(M^T) = \det(M^{-1})$ donc $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$ donc $\det(M)^2 = 1$ donc $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

(d) Notons encore $x = \det(M) = ad - bc$. D'après la question précédente, on a $x = 1$ ou $x = -1$, étudions séparément ces deux cas :

D'une part,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ et } x = 1 &\iff M^T = M^{-1} \text{ et } x = 1 \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{x} & -\frac{b}{x} \\ -\frac{c}{x} & \frac{a}{x} \end{pmatrix} \text{ et } x = 1 \\ &\iff \begin{cases} a = d \\ c = -b \\ b = -c \\ d = a \end{cases} \text{ et } ad - bc = 1 \\ &\iff (a = d \text{ et } b = -c \text{ et } a^2 + b^2 = 1). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ et } x = -1 &\iff M^T = M^{-1} \text{ et } x = -1 \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{x} & -\frac{b}{x} \\ -\frac{c}{x} & \frac{a}{x} \end{pmatrix} \text{ et } x = -1 \\ &\iff \begin{cases} a = -d \\ c = b \\ b = c \\ d = -a \end{cases} \text{ et } ad - bc = -1 \\ &\iff (a = -d \text{ et } b = c \text{ et } -a^2 - b^2 = -1) \\ &\iff (a = -d \text{ et } b = c \text{ et } a^2 + b^2 = 1). \end{aligned}$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé selon laquelle le fait que $a^2 + b^2 = 1$ équivaut à l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Le premier cas mène donc aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\varepsilon \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = 1$ et le second aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\varepsilon \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = -1$. On obtient bien finalement :

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\varepsilon \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}.$$

3. (a) Démontrer $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ revient à démontrer que les ensembles $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ sont tous inclus dans $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$. Or :

- Si $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ alors $M^T = M$ donc $M^T M = M^2 = M M^T$ donc $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
- Si $M \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ alors $M^T = -M$ donc $M^T M = -M^2 = M M^T$ donc $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.
- Si $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ alors $M^T = M^{-1}$ donc $M^T M = I_2 = M M^T$ donc $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

(b) Compte tenu de la question précédente, démontrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \neq \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ revient à démontrer que $\mathcal{N}_2(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire à montrer qu'il existe une matrice

$A \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $A \notin \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ et $A \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ proposée par l'énoncé convient. En effet, $b = -c$ et $a = d$ donc $A \in \mathcal{N}_2(\mathbb{R})$, mais $b \neq c$ donc $A \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $a \neq 0$ donc $A \notin \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 2 \notin \{-1, 1\}$ donc $A \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.