

Feuille de cours 14 : limites de fonctions réelles de la variable réelle

1 Définitions

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, privé éventuellement d'un nombre fini de points et on considère une fonction à valeurs réelles $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

1.1 Limites à l'infini

Rappel : Pour une suite réelle $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ on a donné les définitions suivantes :

- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ lorsque :
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ lorsque :
- $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ lorsque :

On adapte cette définition en faisant jouer à $x \in I$ le rôle de $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir la définition de la limite en $+\infty$ d'une fonction réelle :

Définition 1

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in \mathbb{R}$ tel que $[A_0, +\infty[\subset I$.

On dit que :

- f a pour limite ℓ en $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$ lorsque :
- f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$ lorsque :
- f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$ lorsque :

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, en effet :

Contrairement au cadre des suites, on peut s'intéresser à d'autres limites que $x \rightarrow +\infty$, à commencer par $x \rightarrow -\infty$. Les définitions sont similaires :

Définition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $A_0 \in \mathbb{R}$ tel que $] -\infty, A_0] \subset I$.

On dit que :

- f a pour limite ℓ en $-\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{-\infty} f = \ell$ lorsque :

- f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I, (x \leq M \implies f(x) \geq A)$$

- f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$ lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in I \text{ tel que } x \leq M, f(x) \leq B$$

Une variante plus profondément différente consiste à s'intéresser à la limite $x \rightarrow x_0$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.2 Limite en un point

La notion de limite d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ n'a de sens que si $x_0 \in I$ ou si x_0 appartient *au bord* de I . Par exemple si $I =]-\infty, 2[\cup]3, 5[$ alors on peut s'intéresser à une limite en tout $x_0 \in I$ mais aussi en $x_0 = 2$ ou $x_0 = 3$.

Interprétation graphique : Quand dit-on que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$?

Définition 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou du bord de I .

On dit que f a pour limite ℓ en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x_0} f = \ell$ lorsque :

Exemple : Montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$.

Remarque 4

- La valeur de η dépend de ε comme l'indique l'ordre des quantificateurs. Intuitivement, plus ε est petit plus $\eta = \eta(\varepsilon)$ est .
- Si f est définie en x_0 , i.e. $x_0 \in I$, et si $\lim_{x_0} f = \ell$ alors $f(x_0) = \ell$. En effet,

Les définitions sont analogues dans le cas d'une limite infinie :

Définition 5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou du bord de I .

On dit que :

- f a pour limite $+\infty$ en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x_0} f = +\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \geq A)$$
- f a pour limite $-\infty$ en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x_0} f = -\infty$ lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 : \forall x \in I, (|x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \leq B)$$

1.3 Limite à gauche/à droite en un point

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Peut-on avoir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$?

Dans ce cas de figure, on a tout de même envie de parler de limites de f en $x_0 = 0$. Mais il faut pour cela préciser que l'on restreint f à $\mathbb{R}_*^-$ ou $\mathbb{R}_*^+$.

Définition 6

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un élément de I ou du bord de I . On dit que :

- f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow[x < x_0]{x \rightarrow x_0} \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ lorsque $f|_{I \cap]-\infty, x_0[}$ admet ℓ pour limite en x_0 .
- f admet ℓ pour limite à droite en x_0 , et on note $f(x) \xrightarrow[x > x_0]{x \rightarrow x_0} \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ lorsque $f|_{I \cap]x_0, +\infty[}$ admet ℓ pour limite en x_0 .

Notation : dans le cas où ℓ est une limite finie, on note $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ la limite à

et $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ la limite à .

Exemple : Pour la fonction f de l'exemple précédent, $f(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

et $f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$.

Remarque 7

La notion de limite à gauche (resp. à droite) en x_0 n'a de sens que s'il est possible d'arriver vers x_0 sous la contrainte $x < x_0$ (resp. $x > x_0$) en restant dans I . Cela n'a par exemple pas de sens de chercher la limite à gauche en 0 de la fonction $\ln$.

Proposition 8

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que f est définie "à gauche et à droite de x_0 " de sorte qu'il y a un sens à parler de ses éventuelles limites à gauche et à droite en x_0 .

1. Si $x_0 \notin I$ i.e. si f n'est pas définie en x_0 alors :

f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que ces deux limites sont égales.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$

2. Si $x_0 \in I$ i.e. si f est définie en x_0 alors :

f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et que ces deux limites sont égales à $f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Exemple :

1. Valeur absolue sur $I = \mathbb{R} : |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Étudiez la limite en $x_0 = 0$.
2. Partie entière sur $I = [-1, 1[: \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases}$ Étudiez la limite en $x_0 = 0$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ (ax)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Étudiez la limite en $x_0 = 1$.

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Proposition 9

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$) et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors f a pour limite ℓ en x_0 si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers x_0 , la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ .

Démonstration : $\Leftarrow$ admis.

$\Rightarrow$ Montrons que : si (u_n) tend vers x_0 et si la limite de f en x_0 est ℓ alors la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ .

On traite uniquement le cas où ℓ et x_0 sont réels (les autres cas, similaires, sont à faire en exercice en travaillant le cours).

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, il existe

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0$ donc il existe

Ainsi pour tout $n \geq N$ on a $|u_n - x_0| \leq \eta$ donc $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$ ce qu'il fallait démontrer.

Exemple : Si (u_n) est une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{u_n} =$

On utilise souvent la contraposée du sens que nous avons démontré pour prouver qu'il est faux que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$:

Méthode pour montrer qu'une limite n'existe pas :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$). Pour montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas, on exhibe deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de I telles que :

- $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$,
- mais $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ n'ont pas le même comportement quand $n \rightarrow +\infty$.
Par exemple $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \neq \ell_1$.

Exemple : Montrons que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

2 Calculs de limites : opérations, croissances comparées, équivalents

2.1 Composition

Proposition 10 (composition de limites)

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$, soit x_0 un point de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$), et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \text{ et } g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \ell} \ell' \text{ alors } g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'.$$

Démonstration : On utilise la caractérisation séquentielle de la limite

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |x| \quad \left| \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \sqrt{x}} \quad \right| \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x}$$

2.2 Opérations algébriques

Les règles de calculs sur les limites sont les mêmes que pour les suites. Elles comportent des formes indéterminées (F.I.) pour lesquelles **on ne peut pas conclure** i.e. il peut y avoir ou non de limite, finie ou non.

Il y a quatre types de formes indéterminées :

On considère des fonctions f et g définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- **Somme** : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x)$ est donné par

	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = -\infty$	$\ell' = +\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$\ell = +\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$

- **Produit** : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x)$ est donné par

	$\ell' < 0$	$\ell' = 0$	$\ell' > 0$	$\ell' = -\infty$	$\ell' = +\infty$
$\ell < 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$\ell > 0$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell = -\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = +\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- **Inverse** : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ est donné par

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\ell = -\infty$	$\ell = +\infty$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell = 0$ (mais ni 0^+ , ni 0^-)
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	n'a pas de limite

Remarque : Pour déterminer la limite d'un quotient $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$, utiliser le tableau “inverse” puis le tableau “produit”.

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{\ln x} \quad \left| \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{1}{|x-1|}} \quad \left| \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} \right.$$

2.3 Méthodes de base pour lever une indétermination

Méthode 1 : factoriser par le terme dominant c'est-à-dire par le terme le plus grand.

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} \quad \left| \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^3+x} \quad \left| \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+x^2}{\sqrt{x}+x^2} \quad \left| \quad 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+x^2}{\sqrt{x}+x^2} \right.$$

Remarque 11

Attention, le terme dominant n'est pas toujours celui de plus haut degré ! C'est le cas lorsqu'on s'intéresse à une limite en $\pm\infty$, mais c'est le terme de plus bas degré qui l'emporte dans le cas d'une limite en 0 !

Méthode 2 : utiliser la quantité conjuguée

Exceptionnellement, il peut être judicieux d'utiliser la technique de la quantité conjuguée pour certaines expressions avec des racines carrées.

Exemple : Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$

2.4 Croissances comparées**Proposition 12 (croissances comparées)**

Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit $a > 1$, on a :

$$\begin{array}{l|l} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \text{ et} & 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x = 0 \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0. & 4. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0. \end{array}$$

Remarque :

En particulier avec $a = e$ et $\alpha = \beta = 1$ on retrouve les limites usuelles suivantes (à bien connaître) :

$$\begin{array}{l|l} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \end{array}$$

Remarque 13

On dit que en $+\infty$ les fonctions logarithme sont négligeables devant les fonctions puissances, elles-mêmes négligeables devant les fonctions exponentielles. On note aussi :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \forall a > 1, (\ln x)^\beta \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x = e^{x \ln a}.$$

Démonstration :

1. Voir TD

2. Soit $a > 1$. Pour $x > 0$ on écrit :

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{\exp(\alpha \ln(x))}{\exp(x \ln(a))} = \exp(\alpha \ln(x) - x \ln(a)) = \exp(x \ln(a) \times (\frac{\alpha}{\ln(a)} \frac{\ln(x)}{x} - 1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{car } \frac{\alpha}{\ln(a)} \frac{\ln(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1 \text{ et } x \ln(a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } x \ln(a) \times (\frac{\alpha}{\ln(a)} \frac{\ln(x)}{x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty.$$

3. En posant $y = -x$ on a

$$|x|^\alpha a^x = y^\alpha a^{-y} = \frac{y^\alpha}{a^y}.$$

Comme y tend alors vers $+\infty$ on conclut grâce au point 2.

4. En posant $y = \frac{1}{x}$ on a

$$x^\alpha |\ln(x)|^\beta = \frac{1}{y^\alpha} |\ln(1/y)|^\beta = \frac{|-\ln(y)|^\beta}{y^\alpha} = \frac{(\ln(y))^\beta}{y^\alpha}.$$

Comme y tend alors vers $+\infty$ on conclut grâce au point 1.

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{\ln(x)}{x} \quad \left| \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x) - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} \quad \left| \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

2.5 Équivalents

Définition 14

Soient f et g deux fonctions définies et non nulles au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f et g sont équivalentes en a et on note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.

Proposition 15 (équivalents usuels)

On a les équivalents suivants en 0 :

• $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ • en particulier, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$	• $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ • $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$
---	--

Démonstration : tous ces équivalents sauf le dernier sont issus du fait que, si $f'(0) \neq 0$ alors $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)$ donc $f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)x$. Pour le cosinus, on écrit $\cos(x) - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2})$ puis on conclut avec l'équivalent de sin.

Remarque :

Comme avec les suites, les équivalents sont adaptés à des opérations multiplicatives : on peut multiplier, diviser, mettre à une puissance constante des équivalents. En revanche, on ne peut PAS additionner des équivalents, ni composer un équivalent par une fonction quelconque.

Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$ alors :

- $f_1(x) \times f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) \times g_2(x)$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante $f_1(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)^\alpha$
- mais $f_1(x) + f_2(x) \not\underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$ et pour h une fonction quelconque $h(f_1(x)) \not\underset{x \rightarrow a}{\sim} h(g_1(x))$

En revanche, on peut “composer avec des équivalents” au sens de la proposition suivante :

Proposition 16 (utilisation des équivalents via composition)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $h(J) \subset I$, soient x_0 un point de J ou de son bord et a un point de I ou de son bord (éventuellement $x_0, a \in \{\pm\infty\}$).

$$\text{Si } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a \text{ et si } f(y) \underset{y \rightarrow a}{\sim} g(y) \text{ alors } f(h(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(h(x)).$$

Démonstration :

Exemple : Donner un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $\cos(3x) - 1$ en 0
2. $\ln(1 + \sin(x))$ en 0

2.6 Récapitulatif des techniques à connaître

Récapitulons toutes les techniques pour déterminer une limite, dans l'ordre dans lequel les utiliser :

1. Connaître les limites des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, puissances, fonctions trigonométriques)
2. Utiliser les opérations sur les limites (paragraphe 2.2), attention alors à deux points :
 - les limites de la forme “ $\frac{1}{0}$ ” où il faut utiliser des inégalités pour déterminer si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^-
 - l'existence de 4 formes indéterminées : $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$
3. Savoir utiliser le théorème de composition des limites (paragraphe 2.1).
4. Pour lever une forme indéterminée, mettre en facteur le terme dominant.
5. Pour aider à l'identification du terme dominant, connaître les croissances comparées (paragraphe 2.4).
6. Dans le cas d'une différence de racines on peut penser à utiliser la quantité conjuguée. Dans le cas d'une limite d'une fonction de la forme $f(x)^{g(x)}$ il est obligatoire d'écrire $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x)))$
7. Si aucune des méthodes précédentes n'est suffisante, c'est peut-être qu'il faut utiliser un équivalent (paragraphe 2.5).

3 Théorèmes concernant les limites

3.1 Comportement au voisinage d'une limite finie

Proposition 17

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$) et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ (limite **finie**), alors :

1. La limite ℓ est unique.
2. f est bornée sur un voisinage de x_0 :
 - dans le cas $x_0 \in \mathbb{R} : \exists \eta > 0 \exists M > 0 : \forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, |f(x)| \leq M$.
 - dans le cas $x_0 = +\infty : \exists A \in \mathbb{R}, \exists M > 0 : \forall x \in I \cap]A, +\infty[, |f(x)| \leq M$.
 - dans le cas $x_0 = -\infty : \exists B \in \mathbb{R}, \exists M > 0 : \forall x \in I \cap]-\infty, B[, |f(x)| \leq M$.
3. Si $a < \ell < b$ alors on a $a < f(x) < b$ sur voisinage de x_0 :
 - dans le cas $x_0 \in \mathbb{R} : \exists \eta > 0 : \forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, a < f(x) < b$.
 - dans le cas $x_0 = +\infty : \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap]A, +\infty[, a < f(x) < b$.
 - dans le cas $x_0 = -\infty : \exists B \in \mathbb{R} : \forall x \in I \cap]-\infty, B[, a < f(x) < b$.

En particulier si $\ell > 0$ alors f est strictement positive au voisinage de x_0 .

Remarque 18

La réciproque de 2. est fausse : une fonction bornée au voisinage de x_0 n'admet pas forcément de limite en x_0 . *Contre-exemple :*

3.2 Compatibilité avec la relation d'ordre

Proposition 19

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, et x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$). On suppose que

- $f \leq g$ sur I , et
- f et g ont des limites **finies** en x_0 .

Alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Remarque 20

1. Si $f < g$ sur I , alors en passant à la limite, on ne récupère qu'une inégalité **large** : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
2. Attention, l'existence de la limite finie des fonctions est une **hypothèse** : il faut d'abord savoir que ces limites existent pour pouvoir appliquer ce théorème.

Proposition 21 (Théorème d'encadrement)

Soient $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$) et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

- $g \leq f \leq h$ sur I , et
- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$ (limite commune **finie**).

Alors f admet une limite en x_0 et cette limite vaut $\ell : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Corollaire : Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g = 0$ et si f est bornée alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg) = 0$.

Démonstration :

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Proposition 22 (théorème de comparaison)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, et x_0 un élément de I ou de son bord (éventuellement $x_0 = \pm\infty$).

On suppose que $f \leq g$ sur I . Alors

1. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty$.

Remarque 23

Une seule inégalité suffit mais elle doit être dans le bon sens !

Exemple : Déterminer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}$

3.3 Limite des fonctions monotones

Théorème 24 (théorème de la limite monotone)

On se place sur un intervalle $I = [a, b[$ ($a < b$), où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone alors f admet une limite (finie ou infinie) en b .

Plus précisément :

- si f est croissante et majorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ est finie.
- si f est croissante et non majorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$.
- si f est décroissante et minorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ est finie.
- si f est décroissante et non minorée sur $[a, b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$.

On a bien sûr le résultat analogue pour une limite au bord gauche de l'intervalle :

Théorème 25 (théorème de la limite monotone (redite))

On se place sur un intervalle $I =]a, b]$ ($a < b$), où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone alors f admet une limite (finie ou infinie) en a .

Plus précisément :

- si f est croissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est finie.
- si f est croissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$
- si f est décroissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ est finie.
- si f est décroissante et sur $]a, b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$

Remarque 26

Dans le cas d'une limite finie, ce théorème n'en donne pas la valeur.

Proposition 27

Soient $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est croissante alors f possède en tout point de $x_0 \in]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite toutes les deux **finies** et :

$$f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+).$$

Exemple : la fonction partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

Démonstration : Soit $x_0 \in]a, b[$. On applique le théorème de la limite monotone sur l'intervalle $]a, x_0[$: