

Équations différentielles linéaires du 1er ordre à coefficients constants

1 Rappels de cours

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction (ci-dessous notée le plus souvent y) et faisant intervenir les dérivées de cette fonction. On rappelle ici les théorèmes donnant les solutions d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants.

Ce document ne présente pas les démonstrations des théorèmes énoncés (voir le chapitre dédié plus tard dans l'année), mais on s'attachera à **vérifier que les fonctions solutions satisfont bien l'équation de départ**.

1.1 Équations homogènes

Proposition : Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$ sont $y : x \mapsto K e^{-ax}$ pour $K \in \mathbb{R}$.

Remarque : Ne pas apprendre la formule par cœur, apprendre la forme des solutions puis réfléchir au signe dans l'exponentielle ! En particulier, les solutions de l'équation $y' = ay$ sont $y : x \mapsto K e^{+ax}$ pour $K \in \mathbb{R}$.

Exemples :

- Vérifier que pour tout $K \in \mathbb{R}$ la fonction $y : x \mapsto K e^{-2x}$ est solution de $y' + 2y = 0$.
- Vérifier que pour tout $K \in \mathbb{R}$ la fonction $y : x \mapsto K e^{3x}$ est solution de $y' = 3y$.
- Vérifier que pour tout $K \in \mathbb{R}$ la fonction $y : x \mapsto K e^{-x/2}$ est solution de $2y' + y = 0$.
- Quelles sont les solutions de $y' + 3y = 0$?
- Quelles sont les solutions de $y' = -y$?
- Quelles sont les solutions de $y - 2y' = 0$?

1.2 Équation avec second membre

Proposition : Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont $y : x \mapsto \frac{b}{a} + K e^{-ax}$ pour $K \in \mathbb{R}$.

Elles sont de la forme $y = y_P + y_h$ où $y_P : x \mapsto \frac{b}{a}$ est une solution particulière et où $y_h : x \mapsto K e^{-ax}$ sont les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$.

Remarque : Ne pas apprendre la formule par cœur, apprendre $y = y_P + y_h$ et retenir que y_P est une fonction **constante** solution de $y' + ay = b$. On doit donc avoir $y'_P + ay_P = b$ avec $y'_P = 0$ donc $y_P = \frac{b}{a}$.

Exemples :

- Vérifier que la fonction $y_P : x \mapsto \frac{2}{3}$ est solution de $y' + 3y = 2$.

Quelle est l'équation homogène associée à $y' + 3y = 2$?

Quelles sont les solutions de l'équation homogène ?

Quelles sont les solutions de l'équation $y' + 3y = 2$?

- Trouver une solution particulière (constante) de $2y' - y = 1$.

Quelle est l'équation homogène associée à $2y' - y = 1$?

Quelles sont les solutions de l'équation homogène ?

Quelles sont les solutions de l'équation $2y' - y = 1$?

- Résoudre $y' + 3y + 1 = 0$

- Résoudre $y' = -y + 2$

- Résoudre $y - 2y' = 3$

1.3 Problème de Cauchy

Proposition : Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Pour toutes valeurs de $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b & (\text{équation différentielle}) \\ y(x_0) = y_0 & (\text{condition initiale}) \end{cases}$$

admet une unique solution. Autrement dit, parmi les solutions de l'équation différentielle de la forme $y : x \mapsto \frac{b}{a} + K e^{-ax}$, il existe une unique valeur de $K \in \mathbb{R}$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Remarque : Pour résoudre un problème de Cauchy on commence donc par résoudre l'équation différentielle **sans tenir compte de la condition initiale**. Puis on résout l'équation donnée par la condition initiale pour déterminer la valeur de K .

Exemples :

- On a vu que les solutions de $y' + 3y = 2$ sont $y : x \mapsto \frac{2}{3} + K e^{-3x}$ pour $K \in \mathbb{R}$. En déduire les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

$$\bullet \begin{cases} y' + 3y = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} y' + 3y = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} y' + 3y = 2 \\ y(\pi) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- Résoudre $\begin{cases} 2y' - y - 1 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2 Exercices

Exercice 1

Résoudre :

1. $y' + 4y = 0$
2. $3y' + y = 0$
3. $y' = -2y$
4. $5y + 2y' = 0$
5. $y' = 6y$

Exercice 2

Résoudre :

1. $y' + 3y = 5$
2. $2y' - y = -4$
3. $y' = 7 - y$
4. $4y - 3y' + 8 = 0$
5. $y' - 5y = -2$

Exercice 3

Résoudre :

1. $\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y' = 5 - y \\ y(1) = -2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3y' + y = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y' - 6y + 3 = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + e \end{cases}$
5. $\begin{cases} 4y - 2y' = 8 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$