

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(e^x)$	3. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1}$	5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2 \ln x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x}$	4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^4 - 2x}$	7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$	5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^4 - 2x}$	8. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$	6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$

Exercice 3

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} -3 \ln(-x) - \frac{2}{x}$	3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - 3x$	5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+2x} - 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$	4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$	4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$	7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}$	5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan(e^{-x})$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$	9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sin(x-1)}$

Exercice 5

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Quelle condition doivent satisfaire a et b pour que f ait une limite en 1 ?
2. On suppose la condition précédente satisfaite. Quelle condition supplémentaire doivent satisfaire a et b pour que la fonction $g : x \longmapsto \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ait une limite en 1 finie ? On commencera par réécrire la définition de $g(x)$ en fonction de x .

Exercice 6

1. Montrer que la fonction $(x \mapsto \cos(\frac{1}{x}))$ n'a pas de limite en 0.
2. Etudier la limite de $(x \mapsto e^x \sin x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. On pourra intuitiver le résultat en traçant le graphe de cette fonction sur Geogebra : <https://www.geogebra.org/classic?lang=fr>

Exercice 7

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat de croissance comparée énoncé en cours :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

On fixe $\alpha, \beta > 0$ et on considère un réel γ tel que $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}$.

1. Montrer que $\forall x \geq 1, \ln x \leq x$.
2. En déduire que $\forall x \geq 1, \ln x \leq \frac{x^\gamma}{\gamma}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ valable pour tout $x > 1$.
4. Conclure.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ pour un certain $\ell \in \mathbb{R}$.

Démontrer que f est constante.