

Exercice 1

- Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E .
 - $F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - z + 3t = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^4$
 - $F_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$ avec $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
 - $F_3 = \{f \in E : \int_0^1 f = 0\}$ où E est l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$
- Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E ? Justifier.
 - $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = x + 2y\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
 - $G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y - 2z + 1 = 0\}$ avec $E = \mathbb{R}^3$
 - $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ avec $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 - $G_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$ avec $E = \mathbb{R}^2$
 - $G_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ est paire}\}$ avec $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice 2

Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel sous-jacent et en donner une famille génératrice :

- $F_1 = \{(x - y, x + 2y), x, y \in \mathbb{R}\}$
- $F_2 = \{(x + 2y, x - z, z + y + 2x), x, y, z \in \mathbb{R}\}$
- $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$
- $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x & x + y \\ -y & y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 3

- Démontrer que $E = \{y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y(2) = y(-1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- On note $f : x \longmapsto x^2 - x$, $g : x \longmapsto \cos((x - 2)(x + 1))$ et $h : x \longmapsto 7$.
On note $F = Vect(f, g, h)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces 3 fonctions.
Démontrer que $F \subset E$.

Exercice 4 (familles génératrices)

- Montrer que $((0, 1, 2), (1, 0, 2), (2, 1, 0))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer une famille génératrice de $F = \{(t + s - r, t + r, s), t, s, r \in \mathbb{R}\}$.
- Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = x + y = 0\}$.

Exercice 5 (familles libres)

1. Montrer que $((0, 1, 2), (1, 0, 2), (2, 1, 0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que (A, B, C) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $((1, 3, -1), (2, 0, 1), (0, 6, -3))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

1. Soient $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
2. Montrer que la famille $((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.
3. Montrer que la famille $((1, i, -i), (i, 0, -1), (1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et déterminer les coordonnées de tout vecteur dans cette base.

Exercice 7

1. Soit $F_1 = \{(t + s - r, 2t - 3s - r, 3t - 7s - r) \mid t, s, r \in \mathbb{R}\}$.
 - (a) Déterminer une famille génératrice de F_1 .
 - (b) Cette famille est-elle une base de F_1 ?
 - (c) Déterminer une base de F_1 formée de vecteurs de cette famille.
2. Mêmes questions avec $F_2 = \{(2a + b + 2d, 2a + 2b + 2c + d, 4a - 4c + d, 2a + b) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
3. Mêmes questions avec $F_3 = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ où $u_1 = (2, -1, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 3)$, $u_3 = (1, 4, 7)$ et $u_4 = (1, 1, 2)$.

Exercice 8

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y\}$.

1. Déterminer la dimension de E .
2. Déterminer la dimension de F .
3. Déterminer la dimension de $E \cap F$.

Exercice 9

1. Déterminer une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille 2). Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de taille n).
3. Déterminer une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n).

Exercice 10

Soient $E = \text{Vect}((-1, 2, 1, 0), (-1, 2, 0, 1))$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y = -2z + t\}$.

1. Montrer que E et F sont des s.e.v de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer la dimension de F .
3. Quelle est la dimension de E ?
4. Déterminer un système d'équations cartésiennes de E .
5. Soit $G = E \cap F$. Déterminer une base et la dimension de G .

Exercice 11

On définit les ensembles suivants :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ -2a-c \\ c \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) : x + y + z + t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $E \subset F$.
3. Que vaut $\dim(E)$?
4. En déduire la dimension de F .

Exercice 12

Soient les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les familles (u_1, u_2) , (u_2, u_3) et (u_1, u_3) sont libres.
2. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre?
3. Quelle propriété fausse cet exercice met-il en lumière?

Exercice 13

On considère l'ensemble E formé des suites réelles vérifiant la relation de récurrence

$u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$, c'est-à-dire que :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}.$$

1. Sans donner la forme explicite des éléments de E , montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. En donnant la forme explicite des éléments de E (voir le cours sur les suites récurrentes linéaires du début d'année), déterminer une famille génératrice de E .
3. Montrer que la famille génératrice trouvée à la question précédente est une base de E .
4. Exprimer les coordonnées de tout vecteur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ dans cette base. On donnera le résultat en fonction de u_0 et de u_1 .

Exercice 14

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1, 2, 2, 1)$, $u_2 = (5, 6, 6, 5)$, $u_3 = (-1, -3, 4, 0)$, $u_4 = (0, 4, -3, -1)$.
2. (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, 2, 1)$, $u_3 = (1, -1, 1, -1)$, $u_4 = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 15

Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ la famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. $(u_1 - \lambda e_1, u_2 - \lambda e_2, u_3 - \lambda e_3)$ où $u_1 = (3, 2, -1)$, $u_2 = (2, -1, 1)$, $u_3 = (-4, 4, -1)$ et où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. (u_1, u_2, u_3) où $u_1 = (\lambda, 1, 1)$, $u_2 = (1, \lambda, -1)$, $u_3 = (1, 1, \lambda)$.