

**Exercice 1** Premières simulations

Dans cet exercice, on utilise les fonctions de la bibliothèque `random` pour simuler des expériences aléatoires. On testera plusieurs fois les fonctions obtenues et on comparera ses résultats avec son voisin.

**Q1** On lance un dé classique. Écrire une fonction `lancer_de` ne prenant rien en argument et renvoyant le résultat du dé.

**Q2** On dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules blanches et 1 boule verte. Écrire une fonction `tirer` ne prenant rien en argument et simulant le tirage d'une boule dans l'urne. La fonction renverra "B", "R" ou "V" suivant la couleur de la boule tirée.

**Q3** On garde la même urne que dans la question précédente. Écrire une fonction `tirer_suc` prenant en argument un entier  $n$  et simulant le tirage *successif avec remise* de  $n$  boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées.

**Q4** Toujours avec la même urne, écrire une fonction `tirer_sim` prenant en argument un entier  $n \leq 6$  et simulant le tirage *simultané* de  $n$  boules dans l'urne. On renverra le résultat sous forme d'une liste contenant les couleurs des boules tirées.

**Q5** Écrire une fonction prenant en argument un réel  $p \in [0, 1]$  et renvoyant "bonjour" avec probabilité  $p$  et "au revoir" avec probabilité  $1 - p$ . Tester votre fonction (plusieurs fois) avec  $p = 0, 9$  et avec  $p = 0, 1$ .

**Q6** Écrire une fonction `jour` ne prenant rien en argument et renvoyant "lundi" avec probabilité  $0, 2$ , "mardi" avec probabilité  $0, 7$  et "mercredi" avec probabilité  $0, 1$ .

**Exercice 2** Premières estimations

On reprend la fonction `lancer_de` écrite à l'exercice précédent.

**Q1** On lance le dé  $N$  fois de suite, et on compte le nombre de fois, noté  $C$ , où on obtient 6. Écrire une fonction `repete_de` prenant en entrée un entier  $N$  et renvoyant la valeur  $C$ .

**Q2** En déduire une fonction `fréquence` prenant en argument l'entier  $N$  et renvoyant la fréquence d'apparition du résultat 6, c'est-à-dire la quantité  $\frac{C}{N}$ .

**Q3** Pour  $N$  grand, quelle doit être intuitivement la valeur de cette fréquence ? Vérifier avec l'ordinateur.

**Q4** Tracer l'évolution de la fréquence d'apparition du 6 en fonction de  $N$ . Visualiser sur le graphique le résultat de la question précédente.

Dans les questions ci-dessous on reprend cette technique pour estimer d'autres probabilités.

**Q5** On reprend la fonction `jour` écrite à l'exercice précédent. Écrire un code Python permettant de vérifier que cette fonction renvoie bien "lundi" avec probabilité  $0, 2$ .

**Q6** Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On en tire  $d$  au hasard sans remise et on note  $Y$  le nombre de numéros pairs tirés. Écrire une fonction `nb_pair` prenant en arguments  $n$  et  $d$  et simulant le résultat  $Y$  de cette expérience. On pourra commencer par créer une liste correspondant au contenu de l'urne.

**Q7** Estimer à l'aide de Python la probabilité que  $Y = 0$ . On vérifiera que cette probabilité est proche de  $0,222$  dans le cas  $n = 10$  et  $d = 2$ .

**Exercice 3 Trivial**

Bob joue au Trivial Pursuit, mais n'est pas cultivé dans tous les domaines. Pour simplifier on suppose qu'il y a uniquement trois catégories de questions :

- les questions "Histoire" pour lesquelles Bob a la bonne réponse dans 90% des cas,
- les questions "Littérature" pour lesquelles Bob a la bonne réponse dans 60% des cas,
- et les questions "Sport" pour lesquelles Bob a la bonne réponse dans 30% des cas.

On suppose encore pour simplifier que lorsque c'est son tour de jouer, Bob a une chance sur trois de tomber sur une case de chacune des catégories.

**Q1** Écrire une fonction `reponse` ne prenant rien en argument et renvoyant `True` si Bob donne la bonne réponse, et `False` sinon. On commencera par utiliser une variable permettant de modéliser sur quelle case est tombé Bob.

**Q2** Écrire un programme Python permettant d'estimer quelle est la probabilité que Bob donne la bonne réponse. On doit trouver environ 0,6.

**Q3** Écrire une fonction `essais` prenant en argument un entier  $N$  et simulant  $N$  tours de jeu. Votre fonction doit renvoyer `True` si Bob donne au moins une bonne réponse sur les  $N$  tours.

**Exercice 4 Une marche aléatoire 1D**

**Q1** Écrire une fonction `pas` renvoyant 1 avec probabilité 0.15, 2 avec probabilité 0.25, et 3 avec probabilité 0.6.

**Q2** Un pion initialement situé à l'origine d'un axe gradué de 1 en 1 se déplace selon la règle suivante : à chaque temps  $n \in \mathbb{N}$ , il se déplace d'un nombre aléatoire d'unités vers la droite. Ce nombre est égal à 1 dans 15% des cas, à 2 dans 25% des cas, et à 3 dans 60% des cas. Écrire une fonction renvoyant la position du pion après 10 déplacements.

**Q3** Estimer la probabilité que le pion soit à la position 25 après 10 coups.

**Q4** En moyenne, à quelle position est le pion après 10 coups ?

**Exercice 5 Matrices inversibles**

**Q1** Compléter le rappel de mathématiques suivant :

si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  alors  $\det(A) = \dots\dots\dots$   
et  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \dots\dots\dots$

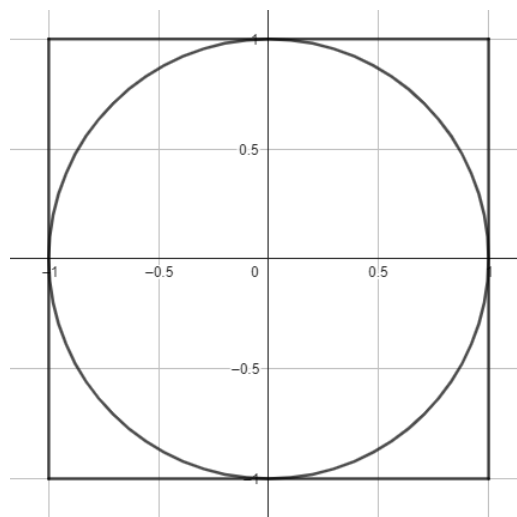
**Q2** Écrire une fonction prenant en argument une matrice carrée de taille 2 et décidant si elle est inversible. Testez votre fonction.

**Q3** Écrire une fonction créant une matrice de taille 2 dont les coefficients sont choisis uniformément au hasard dans  $[0, 1]$ .

**Q4** Estimer la probabilité qu'une telle matrice aléatoire soit inversible. Le résultat trouvé signifie-t-il que toutes les matrices sont inversibles ?

**Exercice 6 Fléchettes**

On considère un carré  $\mathcal{C}$  de côté 2 contenant un disque  $\mathcal{D}$  de rayon 1, tous les deux centrés en l'origine comme sur la figure ci-dessous. On place un point  $M(x, y)$  au hasard dans le carré  $\mathcal{C}$ , et on s'intéresse à la probabilité que  $M$  appartienne au disque  $\mathcal{D}$ .



**Q1** Quelle est l'aire de  $\mathcal{D}$  ?

**Q2** Quelle est la probabilité que  $M$  appartienne à  $\mathcal{D}$  ?

**Q3** En déduire un code Python permettant d'obtenir une approximation de  $\pi$ .