

Programme de colles : semaine 20, du 16/3 au 20/3

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Probabilités finies

Reprise du programme précédent.

2 Limites de fonctions

- définition (ε, η) d'une limite finie ou infinie en un point ou à l'infini. *La définition doit être connue, mais sa manipulation ne doit pas être au cœur des exercices demandés*
- limite à gauche/à droite, notation $f(x_0^-)/f(x_0^+)$
- une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en un point x_0 de son ensemble de définition si et seulement si $\lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^+} f = f(x_0) = \ell$
- caractérisation séquentielle de la limite. Application : montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas en exhibant (u_n) et (v_n) telles que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ et $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, $f(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell' \neq \ell$
- si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de x_0
- si $a < \ell < b$ alors $a < f < b$ au voisinage de x_0
- passage à la limite dans les inégalités larges
- théorèmes d'encadrement ("gendarmes") et de comparaison
- limite des fonctions monotones : toute fonction monotone $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ad-

met une limite (finie ou infinie) en b . Application : si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est croissante alors pour tout $x_0 \in]a, b[$, $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$

- calcul pratique de limites :
 - composition de limites, opérations algébriques, formes indéterminées
 - méthodes pour lever une indétermination : factorisation par le terme dominant, utilisation de la quantité conjuguée, retour à l'exponentielle pour les puissances
 - croissances comparées : pour $\alpha, \beta > 0$ et $a > 1$, $(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{\ll} x^\alpha \underset{+\infty}{\ll} a^x$ où $f(x) \underset{+\infty}{\ll} g(x)$ signifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
 - fonctions équivalentes, propriétés similaires à celles pour les suites équivalentes
 - équivalents usuels : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$.

3 Informatique en langage Python

- Tri d'une liste de nombres : tri par sélection, tri par insertion. *Seules les versions "en place" ont été présentées en classe. Bien que ce ne soit pas à proprement parler une question de cours, les élèves doivent connaître l'implémentation de ces tris en Python.*

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Donner la définition d'une partition (respectivement d'un système complet d'évènements) d'un ensemble (respectivement d'un espace probabilisé). Quelle formule sur les cardinaux (respectivement sur les probabilités) a-t-on dans ce cas ?
2. Donner la définition d'une probabilité sur un univers fini.
3. Énoncer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes ; puis l'appliquer sur un exemple simple proposé par l'examineur.
4. Donner la définition de “ A et B sont deux évènements indépendants”, puis démontrer que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B (ou, au choix de l'examineur, A et $\overline{B}$) le sont aussi.
5. Quand dit-on que des évènements sont mutuellement indépendants ? Deux à deux indépendants ?
6. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $I \subset \mathbb{R}$. Donner une des neuf définitions avec des quantificateurs de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ pour un choix de $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fait par l'examineur.
7. Montrer que la fonction $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
8. Énoncer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
9. Énoncer le théorème de comparaison pour les fonctions.
10. Rappeler la définition de fonctions équivalentes puis donner un équivalent usuel en 0 d'une ou plusieurs des quantités suivantes : $e^x - 1$, $\sin(x)$, $\cos(x) - 1$, $\tan(x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\ln(1+x)$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul “type remédiation” au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 11 (équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement), tous les exos :

<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7019&v=fe3d2>

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.