TD 14

Exo3 : 1) $-x \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^+$ et $\ln(y) \xrightarrow[y\to 0^+]{} -\infty$ donc $\ln(-x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$

Et $\frac{2}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$. Donc $-3\ln(-x) - \frac{2}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$

2) $\sqrt{x^2+2} - x = \frac{\sqrt{x^2+2}^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ car $\sqrt{x^2+2}+x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

3) $\sqrt{x^2+2} - 3x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} - 3x = |x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - 3x = x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - 3\right)$ pour $x > 0$

Or $\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} - 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -2$ donc $\sqrt{x^2+2} - 3x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

(nb : ICI : ici il était inutile de passer par la quantité conjuguée).

4) $x^2 e^x = \frac{(-x)^2}{e^{-x}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ car $-x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\frac{y^2}{e^y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

5) $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$ et, comme $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\sqrt{1+2x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}(2x) = x$

Donc $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+2x}-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+2x}-1} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$

6) $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$. Or $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

donc $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} e$ donc $(1+x)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} e$

exo4 (éléments de réponse uniquement)

1) 0 car $\sim \frac{x^2}{x}$

2) 0 par encadrement

3) 0 car $\sim xe^{-x}$ car $e^{-x} \to 0$

4) $+\infty$ car $\sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

5) $\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \frac{\sqrt{x}}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \times 1 = 0$ par c.c.

6) 0 car $\sim \frac{x^2}{x} = x$

7) 0 car $\frac{\ln(1+x^4)}{x} = \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \underbrace{2\frac{\ln(x)}{x}}_{\to 0 \text{ c.c.}} + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}}_{\to 0}$

8) $\frac{\ln(\cos(x))}{x} = \frac{\ln(1+(\cos(x)-1))}{x}$. Comme $\cos(x) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et que $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y$

$\ln(1+\cos(x)-1) \underset{x\to 0}{\sim} \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc $\frac{\ln(\cos(x))}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{2}$ donc $\frac{\ln(\cos(x))}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

9) Ecrivons $x = 1+h$ avec $h \to 0$

$\frac{\ln(x)}{\sin(x-1)} = \frac{\ln(1+h)}{\sin(h)} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h}{h} = 1$

donc $\frac{\ln(x)}{\sin(x-1)} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$.