

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2,5 pts).

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une famille génératrice.

$$\begin{aligned}
 F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z\} \\
 &= \{(2y - z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}(u_1, u_2) \text{ avec } u_1 = (2, 1, 0) \text{ et } u_2 = (-1, 0, 1) \\
 \text{Donc } F &\text{ est un s.e.v de } \mathbb{R}^3 \text{ et } (u_1, u_2) \text{ est une famille génératrice de } F
 \end{aligned}$$

Question 2 (/2,5 pts).

Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet que E est un espace vectoriel. Soit $G = \{y \in E : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = 0\}$. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E . On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle.

cf 20 bis

Question 3 (/5 pts).

Que penser des affirmations ci-dessous ?

$\text{Vect}(u_1, u_2)$ est une combinaison linéaire de u_1 et u_2	☐ a du sens	☒ n'a pas de sens
$((1, 0), (2, 3), (1, 2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$	☐ est vrai	☒ est faux
(u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$	☒ a du sens	☐ n'a pas de sens
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\begin{pmatrix} x+y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$	☐ a du sens	☒ n'a pas de sens
$\text{Vect}(u_1, u_2) = \{\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\}$	☐ est vrai	☒ est faux

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/2,5 pts).

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une famille génératrice.

cf 20

Question 2 (/2,5 pts).

Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet que E est un espace vectoriel. Soit $G = \{y \in E : \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = 0\}$. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E . On ne demande pas de résoudre l'équation différentielle.

1) Notons $y = 0_E$ la fonction nulle
 alors : $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = 0 + 0 = 0$
 dmc $0_E \in G$

2) Soient $y_1, y_2 \in G$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $(y_1 + y_2)''(x) + (y_1 + y_2)(x)$
 $= y_1''(x) + y_1(x) + y_2''(x) + y_2(x)$

$= 0 + 0$ (car $y_1, y_2 \in G$)
 $= 0$ dmc $y_1 + y_2 \in G$

3) Soient $y \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
 $\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda y)''(x) + (\lambda y)(x)$
 $= \lambda(y''(x) + y(x)) = \lambda \times 0 = 0$
 (car $y \in G$) dmc $\lambda y \in G$.

Ainsi G est un sev de E .

Question 3 (/5 pts).

Que penser des affirmations ci-dessous ?

$((1, 0, 1), (2, 3, -1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$	☐ est vrai	☒ est faux
(u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$	☒ a du sens	☐ n'a pas de sens
$\text{Vect}(u) = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{K}\}$	☒ est vrai	☐ est faux
$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\left\{\begin{pmatrix} x+y \\ -x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$	☒ est vrai	☐ est faux
$\text{Vect}(u_1, u_2)$ est une combinaison linéaire de u_1 et u_2	☐ a du sens	☒ n'a pas de sens