

Programme de colles : semaine 21, du 23/3 au 27/3

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 Limites de fonctions

Reprise du programme précédent.

2 (Sous-)espaces vectoriels

Attention : Les points suivants n'ont pas encore été abordés en classe : dimension, rang, lien avec la géométrie. Par ailleurs, la partie "base d'un s.e.v" ci-dessous n'ayant pas été abordée en TD, elle ne sera pas au coeur des exercices demandés, mais on pourra vérifier que les élèves connaissent les définitions.

On travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La définition d'un espace vectoriel (e.v.) n'est pas au programme de première année. Pour les exercices, on travaille essentiellement dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ ou de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; et, dans une moindre mesure, de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ou de $\mathbb{R}^I$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. **Le chapitre sur les polynômes n'ayant pas encore été abordé, aucun exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ n'a été présenté en cours.**

• sous-espaces vectoriels (s.e.v.) :

- notion de combinaison linéaire
- F est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E lorsque :
 - 1) $0_E \in F$,
 - 2) $\forall u, v \in F, u + v \in F$, et
 - 3) $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in F$.
- F est un s.e.v de E ssi F est non vide et toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F
- savoir montrer qu'un ensemble donné est ou n'est pas un s.e.v.
- une intersection finie de s.e.v. est un s.e.v.

• familles génératrices, s.e.v engendré :

- on note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_n$
- $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un s.e.v
- $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
- savoir déterminer une famille génératrice d'un s.e.v décrit par paramètres ou par des équations cartésiennes
- une famille $(u_1, \dots, u_n)$ génère un e.v. F ssi tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$

• familles libres :

- $(u_1, \dots, u_n)$ est libre lorsque pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on a : $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
- savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée
- une famille de vecteurs est liée ssi un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres
- dans le cas d'une famille de 2 vecteurs : (u_1, u_2) est liée ssi u_1 et u_2 sont colinéaires
- si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$: $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k$

• bases d'un s.e.v :

- une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un s.e.v. F d'un e.v. E lorsque c'est une famille génératrice de F et qu'elle est libre
- une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de F ssi tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$
- coordonnées d'un vecteur dans une base
- exemple des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

3 Informatique en langage Python

- Simulation d'expériences aléatoires avec la bibliothèque `random`.
 - fonctions : `rd.random()`, `rd.uniform(a,b)`, `rd.randint(a,b)`, `rd.choice(L)`, `rd.sample(L,k)`
 - méthode pour simuler un évènement de probabilité p quelconque (à partir d'une v.a. uniforme)
 - estimation d'une probabilité par une approche fréquentielle

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes ; puis l'appliquer sur un exemple simple proposé par l'examineur.
2. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction où $I \subset \mathbb{R}$. Donner une des neuf définitions avec des quantificateurs de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ pour un choix de $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fait par l'examineur.
3. Montrer que la fonction $\sin$ n'a pas de limite en $+\infty$.
4. Énoncer le théorème d'encadrement pour les fonctions.
5. Énoncer le théorème de comparaison pour les fonctions.
6. Rappeler la définition de fonctions équivalentes puis donner un équivalent usuel en 0 d'une ou plusieurs des quantités suivantes : $e^x - 1$, $\sin(x)$, $\cos(x) - 1$, $\tan(x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\ln(1+x)$.
7. Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation cartésienne ou par paramètres est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'examineur choisira l'ensemble F et la valeur de $n \in \{2, 3, 4\}$.
8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .
9. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_n \in E$. Donner la définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E .
10. Donner la définition d'une famille libre et d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.
11. Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$.

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 11 (équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement), tous les exos :
<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7019&v=fe3d2>

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.