

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition puis justifier par une phrase qu'elle est continue sur cet ensemble.

1. $f : x \mapsto \cos(x)e^x - x \sin(x)$

2. $g : x \mapsto \sqrt{x} \ln(x)$

3. $h : x \mapsto \frac{x^4 - 1}{3 + 2x + x^2}$

4. $u : x \mapsto \frac{x}{\cos(x) - 1}$

5. $v : x \mapsto \sqrt{1 - \ln(x)}$

6. $w : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{x})$

Exercice 2

Les fonctions suivantes sont-elles continues en x_0 ?

1. $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + 2x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 2.$

2. $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\ln(x)} & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x \in \{0, 1\} \end{cases} \quad \text{en } x_0 \in \{0, 1\}.$

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en x_0 ?

1. $f_1 : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \quad \text{en } x_0 = 1$

2. $f_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 9}{x + 3} \quad \text{en } x_0 = -3.$

3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2-x}} \quad \text{en } x_0 = 2$

4. $f_4 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1} \quad \text{en } x_0 = 1.$

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f .
2. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
3. Déterminer f^{-1} .

Exercice 5

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur un intervalle à déterminer et donner l'expression de f^{-1} .

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation (E_n) suivante d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E_n) : x + \tan(x) = n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution, on la note x_n .
2. Déterminer la limite de (x_n) .

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x).$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha > 0$.
2. Montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

Exercice 8

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = e^x.$$

Montrer que $f = \exp$ ou $f = -\exp$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = g(x)^2.$$

Montrer que g est constante.

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est constante.
2. Étudier la limite de (u_n) .
3. Conclure que f est constante.

Exercice 10

Déterminer toutes les fonctions continues $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in [0, 1], f(x^2) = f(x)$.