

Programme de colles : semaine 22, du 30/3 au 3/4

Les nouveautés par rapport à la semaine précédente sont en bleu.

1 (Sous-)espaces vectoriels

On travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La définition d'un espace vectoriel (e.v.) n'est pas au programme de première année. Pour les exercices, on travaille essentiellement dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ ou de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; et, dans une moindre mesure, de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, ou de $\mathbb{R}^I$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. **Le chapitre sur les polynômes n'ayant pas encore été abordé, aucun exemple de sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ n'a été présenté en cours.**

- sous-espaces vectoriels (s.e.v.) :
 - notion de combinaison linéaire
 - F est un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E lorsque :
 - 1) $0_E \in F$,
 - 2) $\forall u, v \in F, u + v \in F$, et
 - 3) $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u \in F$.
 - F est un s.e.v de E ssi F est non vide et toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F
 - savoir montrer qu'un ensemble donné est ou n'est pas un s.e.v.
 - une intersection finie de s.e.v. est un s.e.v.
- familles génératrices, s.e.v engendré :
 - on note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_n$
 - $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un s.e.v
 - $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$
 - savoir déterminer une famille génératrice d'un s.e.v décrit par paramètres ou par des équations cartésiennes
 - une famille $(u_1, \dots, u_n)$ génère un e.v. F ssi tout vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$
- familles libres :
 - $(u_1, \dots, u_n)$ est libre lorsque pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ on a :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$
- savoir montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou liée
- une famille de vecteurs est liée ssi un de ses vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres
- dans le cas d'une famille de 2 vecteurs : (u_1, u_2) est liée ssi u_1 et u_2 sont colinéaires
- si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = \mu_k$$
- bases d'un s.e.v :
 - une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base d'un s.e.v. F d'un e.v. E lorsque c'est une famille génératrice de F et qu'elle est libre
 - une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de F ssi tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$
 - coordonnées d'un vecteur dans une base
 - exemple des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 - savoir montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un s.e.v. F et déterminer les coordonnées de tout vecteur de F dans cette base
 - savoir obtenir une base d'un s.e.v à partir d'une famille génératrice non libre, en appliquant le résultat suivant : si $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

- dimension d'un s.e.v :

- toutes les bases d'un s.e.v E ont le même nombre d'éléments noté $\dim(E)$
- si E est de dimension p alors : *(les résultats suivants sont tous admis)*
 - une famille libre de E compte au plus p éléments, et une famille libre à p éléments est une base
 - une famille génératrice de E compte au moins p éléments, et une famille génératrice à p éléments est une base
- si $E \subset F$ alors $\dim(E) \leq \dim(F)$
- si $E \subset F$ et $\dim(E) = \dim(F)$ alors $E = F$

- rang d'une famille de vecteurs :

- pour $u_1, \dots, u_n \in E$ on note $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n))$
- le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de ces vecteurs dans une base. *Nous n'avons pas introduit de notation pour cette matrice pour le moment.*
- $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$

2 Continuité

Attention : début de chapitre uniquement, les théorèmes sur la continuité n'ont pas encore été abordés. On pourra demander des exercices réexploitant les calculs de limites vus précédemment.

- continuité en un point du domaine, continuité à gauche / à droite, sur un ensemble *(la définition de la continuité avec des quantificateurs doit être comprise mais ne sera pas au cœur des exercices demandés)*
- prolongement par continuité en un point
- caractérisation séquentielle de la continuité.
Application : soit (u_n) une suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.
- Savoir faire une phrase pour justifier qu'une fonction est continue en tant que somme, produit, quotient ou composée de fonctions continues *(on sera particulièrement attentif aux ensembles de départ et d'arrivée dans le cas d'une composée)*

3 Informatique en langage Python

- Simulation d'expériences aléatoires avec la bibliothèque `random`.
 - fonctions : `rd.random()`, `rd.uniform(a,b)`, `rd.randint(a,b)`, `rd.choice(L)`, `rd.sample(L,k)`
 - méthode pour simuler un événement de probabilité p quelconque *(à partir d'une v.a. uniforme)*
 - estimation d'une probabilité par une approche fréquentielle

4 Questions de cours

Les premières minutes de la colle porteront sur une ou plusieurs des questions suivantes :

1. Énoncer une des formules suivantes : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes ; puis l'appliquer sur un exemple simple proposé par l'examineur.
2. Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^n$ décrit par une équation cartésienne ou par paramètres est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. *L'examineur choisira l'ensemble F et la valeur de $n \in \{2, 3, 4\}$.*
3. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que $\bigcap_{i=1}^n F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient $u_1, \dots, u_n \in E$. Donner la définition de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ puis démontrer que c'est un sous-espace vectoriel de E .
5. Donner la définition d'une famille libre et d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.
6. Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ on a : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$.
7. Donner la définition d'une base et de la dimension d'un sous-espace vectoriel.
8. Qu'appelle-t-on coordonnées d'un vecteur dans une base ?
9. Donner la définition du rang d'une famille de vecteurs.
10. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Donner la définition de : " f est continue en x_0 ". Illustrer cette définition par les graphes d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en x_0 .

La colle se poursuivra avec un ou plusieurs calcul "type remédiation" au sein ou non d'un exercice plus compliqué. Cette semaine, ces calculs doivent être similaires à ceux traités dans les feuilles de :

- Remédiations 11 (équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants uniquement), tous les exos :

<https://cahier-de-prepa.fr/bcpst1b-berthelot/download?id=7019&v=fe3d2>

Les questions de cours sont notées sur 10 points, le reste des exercices sur 10 autres points.