

NOM :

PRENOM :

Question 1 (/4 pts).Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, -1)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quel est le vecteur dont les coordonnées dans la base (u, v, w) sont $(1, -2, -1)$?
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(0, 1, -3)$ dans la base (u, v, w) ?

1) Calculons, en utilisant la matrice de (u, v, w) dans la base canonique

$$\begin{aligned} \text{Mg}(u, v, w) &= \text{Mg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Mg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix} \\ &= \text{Mg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{matrix} \\ &= 3 \text{ donc } (u, v, w) \text{ est libre.} \end{aligned}$$

Comme de plus $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, cela prouve que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Il s'agit de $1u - 2v - 1w = (1, 0, 1) - (-2, 2, 0) - (1, 0, -1) = (2, -2, 2)$

3) On écrit pour $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$

$$d_1 u + d_2 v + d_3 w = (0, 1, -3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 - d_2 + d_3 = 0 \\ d_2 = 1 \\ d_1 - d_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 + d_3 = d_2 = 1 \\ d_1 - d_3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad (L_2 \leftarrow \frac{L_2 + L_3}{2}) \\ d_3 = \frac{1-(-3)}{2} = 2 \quad (L_3 \leftarrow \frac{L_2 - L_3}{2}) \end{cases}$$

donc les coordonnées de $(0, 1, -3)$ dans la base (u, v, w) sont $(-1, 1, 2)$

NOM :

PRENOM :

Question 3 (/4 pts).

Soient $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (-1, 0, 1)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quel est le vecteur dont les coordonnées dans la base (u, v, w) sont $(-1, 2, 1)$?
3. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(0, -1, 3)$ dans la base (u, v, w) ?

1) Calculons, en utilisant la matrice de (u, v, w) dans la base canonique

$$\begin{aligned} \text{rg}(u, v, w) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{aligned}$$

Comme de plus $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, cela prouve que (u, v, w) est libre et une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Il s'agit de $-1u + 2v + 1w = (-1, 0, -1) + (2, -2, 0) + (-1, 0, 1) = (0, -2, 0)$

3) On veut pour $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$,

$$d_1 u + d_2 v + d_3 w = (0, -1, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 - d_3 = 0 \\ -d_2 = -1 \\ d_1 - d_2 + d_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 - d_3 = -d_2 = -1 \\ d_1 + d_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad (L_2 \leftarrow \frac{L_2 + L_3}{2}) \\ d_3 = \frac{3-(-1)}{2} = 2 \quad (L_3 \leftarrow \frac{L_3 - L_2}{2}) \end{cases}$$

donc les coordonnées de $(0, -1, 3)$ dans la base (u, v, w) sont $(1, 1, 2)$